PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z NOWĄ ERĄ 2018/2019

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

Copyright by Nowa Era Sp. z o.o.

Zadania zamknięte

Punkt przyznaje się za wskazanie poprawnej odpowiedzi (zaznaczenie właściwego pola na karcie odpowiedzi).

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1.1. Liczby rzeczywiste. Zdający przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków, potęg). 2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.	**D**

Zadanie 2. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1.4. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.	**C**

Zadanie 3. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1.1. Liczby rzeczywiste. Zdający przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków, potęg). SZKOŁA PODSTAWOWA 3.4. Liczby całkowite. Zdający wyznacza wartość bezwzględną liczby całkowitej.	**B**

Zadanie 4. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	1.9. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok).	**D**

Zadanie 5. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3.5. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.	**B**

Zadanie 6. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$. GIMNAZJUM 6.3. Wyrażenia algebraiczne. Zdający redukuje wyrazy podobne w sumie algebraicznej.	**A**

Zadanie 7. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3.2. Równania i nierówności. Zdający wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. GIMNAZJUM 7.6. Równania. Zdający rozwiązuje układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi.	**A**

Zadanie 8. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3.7. Równania i nierówności. Zdający korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x + 1)(x – 7)= 0$.	**B**

Zadanie 9. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	6.1. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°.	**A**

Zadanie 10. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.6. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.	**B**

Zadanie 11. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.4. Funkcje. Zdający na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$.	**A**

Zadanie 12. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.7. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.	**D**

Zadanie 13. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.10. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).	**C**

Zadanie 14. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.2. Funkcje. Zdający oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość.	**C**

Zadanie 15. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.3. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą).	**A**

Zadanie 16. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	5.3. Ciągi. Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.	**B**

Zadanie 17. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5.3. Ciągi. Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz […] ciągu arytmetycznego.	**D**

Zadanie 18. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8.6. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległość dwóch punktów. GIMNAZJUM 10.2. Figury płaskie. Zdający rozpoznaje wzajemne położenie prostej i okręgu, rozpoznaje styczną do okręgu.	**C**

Zadanie 19. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8.3. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza równanie prostej, która jest równoległa […] do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt.	**D**

Zadanie 20. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.4. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi. GIMNAZJUM 10.2. Figury płaskie. Zdający oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.	**A**

Zadanie 21. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7.1. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.	**B**

Zadanie 22. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	GIMNAZJUM 11.2. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość […] stożka […] (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).	**B**

Zadanie 23. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	GIMNAZJUM 11.1. Bryły. Zdający rozpoznaje graniastosłupy i ostrosłupy.	**C**

Zadanie 24. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	10.3. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.	**D**

Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 25. (0–2)

Rozwiąż nierówność $(2x-3)^2-4 \geqslant 0$.

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3.5. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

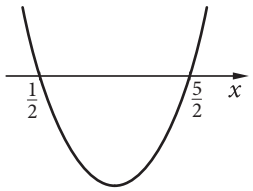
Porządkujemy nierówność kwadratową i otrzymujemy $4x^2-12x+5 \geqslant 0$.

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego $4x^2-12x+5$:

$\Delta=(-12)^2-4\cdot 4\cdot 5=144-80=64$, a następnie jego pierwiastki:

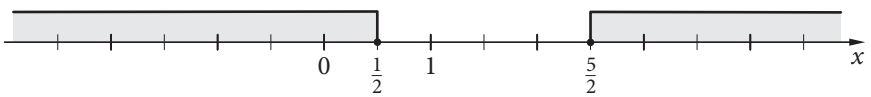
$x_1=\frac{12-8}{8}=\frac{1}{2}$ i $x_2=\frac{12+8}{8}=\frac{5}{2}$.

Szkicujemy wykres trójmianu kwadratowego, uwzględniając obliczone pierwiastki i odpowiedni zwrot ramion paraboli:



Podajemy zbiór rozwiązań nierówności na jeden z podanych sposobów:

- $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{2}, +\infty\right)$
- $x \leqslant \frac{1}{2}$ lub $x \geqslant \frac{5}{2}$
- graficznie z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



II sposób

Przekształcamy nierówność kwadratową do postaci równoważnej $(2x-3)^2 \geqslant 4$ i dalej do postaci alternatywy dwóch nierówności liniowych: $2x-3 \geqslant 2$ lub $2x-3 \leqslant -2$ (lub nierówności $|2x-3| \geqslant 2$). Rozwiązujemy każdą z nierówności i otrzymujemy rozwiązanie, np. w postaci: $x \geqslant \frac{5}{2}$ lub $x \leqslant \frac{1}{2}$.

III sposób

Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów:

$(2x-3)^2-4=(2x-3-2)(2x-3+2)=4\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$. Zatem nierówność

$(2x-3)^2-4 \geqslant 0$ zachodzi dla $x \geqslant \frac{5}{2}$ oraz dla $x \leqslant \frac{1}{2}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ..... **1 pkt**

gdy:

- obliczy pierwiastki trójmianu $y = 4x^2 - 12x + 5$: $x_1 = \frac{1}{2}$ i $x_2 = \frac{5}{2}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze rozwiązanie nierówności

albo

- obliczy dwa różne pierwiastki trójmianu z błędami i konsekwentnie rozwiąże nierówność kwadratową

albo

- przekształci nierówność do postaci alternatywy: $2x - 3 \geqslant 2$ lub $2x - 3 \leqslant -2$, a następnie rozwiąże poprawnie jedną z nich $x \geqslant \frac{5}{2}$ lub $x \leqslant \frac{1}{2}$

albo

- przekształci nierówność do postaci $|2x - 3| \geqslant 2$

albo

- skorzysta ze wzoru na różnicę kwadratów $(2x-3)^2 - 2^2$ i przekształci nierówność do postaci: $4\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \geqslant 0$.

Zdający otrzymuje ..... **2 pkt**

gdy wyznaczy bezbłędnie zbiór rozwiązań nierówności.

Zadanie 26. (0–2)

Dla kąta ostrego α dany jest $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sqrt{\text{tg}^2\alpha + 1}$.

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6.4. Trygonometria. Zdający stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$. 6.5. Trygonometria. Zdający, znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

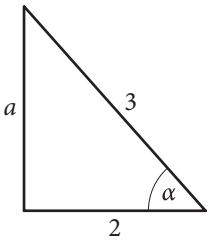
Obliczamy wartość $\sin\alpha$, korzystając z jedynki trygonometrycznej oraz z informacji o tym, że kąt α jest ostry. Otrzymujemy $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Obliczamy $\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Wartość wyrażenia $\sqrt{\text{tg}^2\alpha + 1}$ jest zatem równa $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{5}{4} + 1} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

II sposób

Wykorzystujemy trójkąt prostokątny, w którym występuje taki kąt ostry α, że $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, np.



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $a^2 + 2^2 = 3^2$, a stąd $a = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$.

Obliczamy $\text{tg}\alpha = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

a następnie wartość wyrażenia $\sqrt{\text{tg}^2\alpha + 1} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{5}{4} + 1} = \frac{9}{4} = \frac{3}{2}$.

III sposób

Przekształcamy wyrażenie $\sqrt{\text{tg}^2\alpha + 1}$

do postaci $\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1} = \sqrt{\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{|\cos\alpha|}$.

$\cos\alpha$ jest dodatni, więc $\frac{1}{|\cos\alpha|} = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ..... **1 pkt**

gdy:

- obliczy $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ oraz $\text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- obliczy $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, popełni błąd przy obliczaniu wartości $\text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- obliczy długość przyprostokątnej α oraz $\text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu długości przyprostokątnej a i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- przekształci wyrażenie $\sqrt{\text{tg}^2\alpha + 1}$ do postaci $\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ..... **2 pkt**

gdy obliczy wartość wyrażenia $\sqrt{\text{tg}^2\alpha + 1}$ równą $\frac{3}{2}$.

Zadanie 27. (0–2)
Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych mniejszych od 30 losujemy dwa razy po jednej liczbie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że obie wylosowane liczby są podzielne przez 3.

III. Modelowanie matematyczne.	10.3. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Przykładowe rozwiązanie
W zbiorze liczb naturalnych dwucyfrowych mniejszych od 30 znajduje się $29 - 9 = 20$ liczb. Wśród nich liczby podzielne przez 3 to: 12, 15, 18, 21, 24, 27. Jest ich 6.
Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych w doświadczeniu polegającym na dwukrotnym losowaniu liczb bez zwracania ze zbioru 20-elementowego jest równa $|\Omega| = 20 \cdot 19 = 380$. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A to $|A| = 6 \cdot 5 = 30$.
W doświadczeniu mamy do czynienia z modelem klasycznym (zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne), a więc obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A, korzystając z definicji klasycznej: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{30}{380} = \frac{3}{38}$.

Uwaga
Obliczanie iloczynów $20 \cdot 19$ oraz $6 \cdot 5$ jest zbędne – ułamki można skracać:
$P(A) = \frac{6 \cdot 5}{20 \cdot 19} = \frac{3}{2 \cdot 19} = \frac{3}{38}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ..... **1 pkt**

gdy wyznaczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia $|\Omega| = 20 \cdot 19 = 380$ albo liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 6 \cdot 5 = 30$ (przy czym może je zostawić w postaci iloczynów).

Zdający otrzymuje ..... **2 pkt**

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{3}{38}$.

Zadanie 28. (0–2)
W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geqslant 1$, dane są wyrazy $a_2 = -2$ i $a_5 = 7$. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu od piątego do dwudziestego.

IV. Użycie i tworzenie strategii.	5.3. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Przykładowe rozwiązania

I sposób
Dane wyrazy ciągu arytmetycznego i zastosowanie wzoru na n-ty wyraz tego ciągu daje układ równań $\begin{cases} a_1 + r = -2 \\ a_1 + 4r = 7 \end{cases}$, z którego, po odjęciu równań stronami, otrzymujemy $3r = 9$. Rozwiązanie tego układu to $r = 3$ i $a_1 = -5$.

Sumę wyrazów tego ciągu od piątego do dwudziestego obliczamy, korzystając ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.
Suma ta jest równa:
$$S_{20} - S_4 = \frac{2 \cdot (-5) + 19 \cdot 3}{2} \cdot 20 - \frac{2 \cdot (-5) + 3 \cdot 3}{2} \cdot 4 = 47 \cdot 10 - (-1) \cdot 2 = 470 + 2 = 472.$$

II sposób

Dla ciągu arytmetycznego możemy zapisać równanie $a_2 + 3r = a_5$, czyli $-2 + 3r = 7$ i dalej $r = 3$.
Wyrazy od piątego do dwudziestego ciągu (a_n), których sumę należy obliczyć, można potraktować jako kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego (b_n), w którym $b_1 = a_5 = 7$ i $b_{16} = a_{20} = a_5 + 15r = 7 + 15 \cdot 3 = 52$.

Dla ciągu (b_n) obliczamy sumę $S_{16} = \frac{7 + 52}{2} \cdot 16 = 59 \cdot 8 = 472$.

III sposób

Możemy zapisać równanie $a_2 + 3r = a_5$, czyli $-2 + 3r = 7$ i dalej $r = 3$.
Mamy obliczyć sumę: $a_5 + a_6 + ... + a_{20} = a_5 + (a_5 + r) + ... + (a_5 + 15r) =$
$= 16a_5 + (1 + 2 + ... + 15)r = 16 \cdot 7 + \frac{15 \cdot 16}{2} \cdot 3 = 112 + 45 \cdot 8 = 472.$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ..... **1 pkt**

gdy:

- obliczy $r = 3$ i $a_1 = 5$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu a_1 i r i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca.

albo

- obliczy $r = 3$ i poda $b_1 = a_5 = 7$

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu r i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca.

Zdający otrzymuje ..... **2 pkt**

gdy:

- obliczy sumę wyrazów tego ciągu (a_n) od piątego do dwudziestego (472)

albo

- obliczy sumę wyrazów ciągu (b_n) od pierwszego do szesnastego (472).

Zadania 29. (0–2)

Udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej ujemnej x prawdziwa jest nierówność
$$9x + \frac{1}{x} \leqslant -6.$$

V. Rozumowanie i argumentacja.	2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Niech x oznacza dowolna liczbę rzeczywistą ujemną. Mamy wykazać, że $9x+\frac{1}{x}\leqslant -6$. Przekształcamy tezę do postaci równoważnej.

$$9x+\frac{1}{x}+6\leqslant 0$$

$$\frac{9x^2+1+6x}{x}\leqslant 0$$

$$\frac{(3x+1)^2}{x}\leqslant 0$$

Otrzymana nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej ujemnej, bo kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny, a iloraz liczby nieujemnej i liczby ujemnej jest liczbą rzeczywistą niedodatnią. A zatem równoważna jej teza też jest prawdziwa. To kończy dowód.

II sposób

Niech x oznacza dowolna liczbę rzeczywistą ujemną. Mamy wykazać, że $9x+\frac{1}{x}\leqslant -6$. Przekształcamy tezę do postaci równoważnej.

$$9x+\frac{1}{x}+6\leqslant 0$$

$$\frac{9x^2+1+6x}{x}\leqslant 0$$

$$\frac{(3x+1)^2}{x}\leqslant 0 \;|\cdot x,\; x<0 \text{ (z założenia)}$$

$$(3x+1)^2\geqslant 0.$$

Otrzymana nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej, bo kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny. A zatem teza twierdzenia jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej ujemnej.

III sposób

Niech x oznacza dowolna liczbę rzeczywistą ujemną. Mamy wykazać, że $9x+\frac{1}{x}\leqslant -6$. Przekształcamy tezę do postaci równoważnej.

$$9x+\frac{1}{x}+6\leqslant 0$$

$$\frac{9x^2+1+6x}{x}\leqslant 0 \;|\cdot x,\; x<0 \text{ (z założenia)}$$

$$9x^2+6x+1\geqslant 0$$

Rozwiązujemy otrzymaną nierówność kwadratową.
Obliczamy wyróżnik $\Delta=6^2-4\cdot 9\cdot 1=36-36=0$ trójmianu $9x^2+6x+1$ i pierwiastek podwójny: $x_0=-\frac{6}{2\cdot 9}=-\frac{1}{3}$. Najmniejsza wartość tej funkcji jest równa 0, a zatem nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej. A zatem teza twierdzenia jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej ujemnej.

IV sposób

Przekształcamy lewą stronę danej nierówności:
$\mathrm{L}=9x+\frac{1}{x}=\frac{9x^2+1}{x}=\left(\frac{9x^2+1}{x}+6\right)-6=\frac{(3x+1)^2}{x}-6\leqslant 0-6=-6=\mathrm{P}$
Po przekształceniu otrzymujemy prawą stronę danej nierówności; znak nierówności możemy wstawić, gdyż $(3x+1)^2\geqslant 0$ i $x<0\Rightarrow \frac{(3x+1)^2}{x}\leqslant 0$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ..... **1 pkt**

gdy:

- zapisze nierówność w postaci równoważnej $\frac{(3x+1)^2}{x} \leqslant 0$ albo $(3x+1)^2 \geqslant 0$

albo

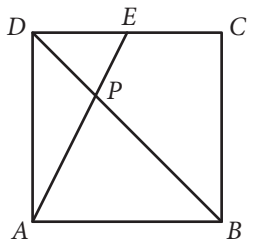
- zapisze nierówność w postaci równoważnej $9x^2+6x+1 \geqslant 0$ i obliczy wyróżnik $\Delta = 0$ lub poda współrzędne wierzchołka paraboli.

Zdający otrzymuje ..... **2 pkt**

gdy przeprowadzi pełny dowód, uwzględniając informację o równoważnym przekształceniu tezy oraz wniosek wynikający z równoważności otrzymanego wyrażenia oraz tezy.

Zadanie 30. (0–3)

W kwadracie *ABCD*, w którym punkt *E* jest środkiem boku *CD*, poprowadzono przekątną *BD* i odcinek *AE*, które przecięły się w punkcie *P*. Uzasadnij, że suma pól trójkątów *ABP* i *DEP* stanowi $\frac{5}{12}$ pola kwadratu *ABCD*.

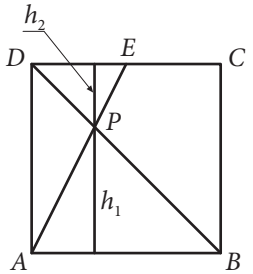


V. Rozumowanie i argumentacja.	7.3. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów. GIMNAZJUM 10.9. Figury płaskie. Zdający oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Przyjmujemy oznaczenia a – długość boku kwadratu, h_1 – odległość punktu P od boku AB, h_2 – odległość punktu P od boku CD.



Możemy zapisać pola trójkątów *ABP* i *DEP* w postaci, $P_{ABP} = \frac{1}{2}a \cdot h_1$, $P_{DEP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot h_2$ oraz pole kwadratu $P_{ABCD} = a^2$.

Trójkąty *ABP* i *DEP* są podobne (na podstawie cechy kkk) w skali $k = 2$ (lub w skali $k = \frac{1}{2}$), czyli $\frac{h_1}{h_2} = 2$, a stąd mamy $h_1 = \frac{2}{3}a$ i $h_2 = \frac{1}{3}a$.

Suma pól trójkątów *ABP* i *DEP* jest więc równa

$$P_{ABP} + P_{DEP} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{2}{3}a + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{3}a = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{12}a^2 = \frac{4}{12}a^2 + \frac{1}{12}a^2 = \frac{5}{12}a^2 = \frac{5}{12} \cdot P_{ABCD}$$

A zatem suma pól trójkątów *ABP* i *DEP* stanowi $\frac{5}{12}$ pola kwadratu.

II sposób

Trójkąty *ABP* i *EDP* są podobne, bo mają takie same kąty. Skala podobieństwa to $\frac{|AB|}{|ED|} = 2$, więc $|BP| = 2|DP|, |AP| = 2|PE|$. Niech *S* będzie polem ΔEDP. Wtedy:

$P_{APD} = 2P_{EDP} = 2S$ – ta sama wysokość z wierzchołka *D*, podstawa 2 razy dłuższa,

$P_{ABP} = 4S$ – skala podobieństwa,

$P_{ABCD} = 2(P_{APD} + P_{ABP}) = 12S$ i $P_{EDP} + P_{ABP} = 5S$.

Stąd teza.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ..... **1 pkt**

gdy zauważy podobieństwo trójkątów *ABP* i *DEP* i obliczy skalę podobieństwa.

Zdający otrzymuje ..... **2 pkt**

gdy:

- zapisze pola trójkątów *ABP* i *DEP* w zależności od długości boku kwadratu *a*: $P_{ABP} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{2}{3}a$ i $P_{DEP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{3}a$

albo

- zapisze pola trójkąta *ABP* oraz kwadratu *ABCD* jako wielokrotności pola trójkąta *DEP*.

Zdający otrzymuje ..... **3 pkt**

gdy uzasadni tezę.

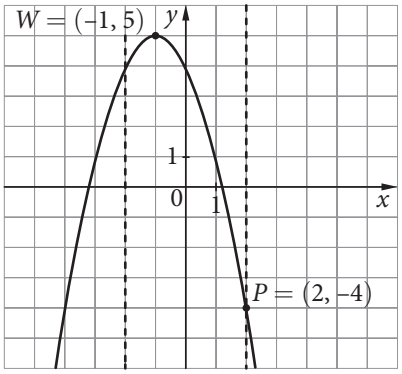
Zadania 31. (0–4)

Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, jeżeli wierzchołek paraboli, która jest jej wykresem, znajduje się w punkcie $W = (-1, 5)$ oraz funkcja ta w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$ osiąga najmniejszą wartość równą -4.

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający: 9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie; 10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje); 11) wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

Przykładowe rozwiązanie

Ponieważ wierzchołek paraboli znajduje się w punkcie $W = (-1, 5)$, to wzór funkcji kwadratowej możemy zapisać w postaci kanonicznej $y = a \cdot (x+1)^2 + 5$.



Z informacji o wartości najmniejszej tej funkcji w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$ wynika (np. na podstawie wykresu i analizy własności funkcji kwadratowej), że do wykresu funkcji należy punkt $P = (2, -4)$. Jego współrzędne spełniają więc powyższe równanie, a zatem otrzymujemy $-4 = a \cdot (2+1)^2 + 5$, które doprowadzamy do postaci $-9 = 9a$.
Jego rozwiązaniem jest $a = -1$. Szukany wzór funkcji kwadratowej to $y = -(x+1)^2 + 5$.
Po przekształceniu go do postaci ogólnej otrzymujemy $y = -x^2 - 2x + 4$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 pkt

- Zdający zapisze wzór funkcji kwadratowej w postaci $y = a \cdot (x+1)^2 + 5$

albo

- zauważy, że do wykresu funkcji należy punkt $P = (2, -4)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt

- Zdający zapisze wzór funkcji kwadratowej w postaci $y = a \cdot (x+1)^2 + 5$ i zauważy, że do wykresu funkcji należy punkt $P = (2, -4)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt

- Zdający wykorzysta punkt $P = (2, -4)$ i zapisze równanie $-4 = a \cdot (2+1)^2 + 5$.

Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt

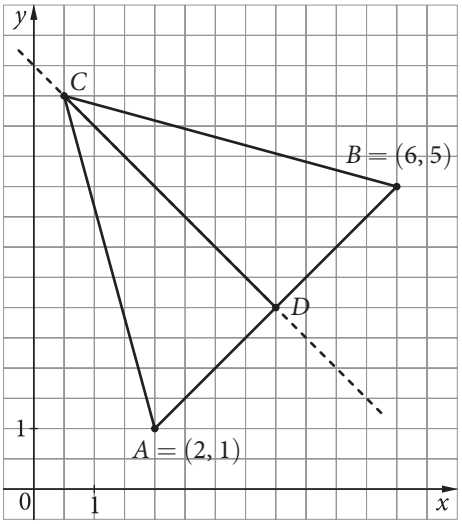
- Zdający wyznaczy z równania $a = -1$ i przekształci wzór funkcji do postaci ogólnej $y = -x^2 - 2x + 4$.

Zadanie 32. (0–5)

W trójkącie równoramiennym ABC dane są wierzchołki podstawy $A = (2, 1)$ i $B = (6, 5)$ oraz wysokość $|CD| = \frac{7\sqrt{2}}{2}$. Oblicz współrzędne wierzchołka C, jeżeli wiadomo, że obie te współrzędne są dodatnie.

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: 1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej); 3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; 5) wyznacza współrzędne środka odcinka; 6) oblicza odległość dwóch punktów.

Przykładowe rozwiązanie



Spodek wysokości D jest środkiem boku AB, a zatem jego współrzędne to: $D=\left(\frac{2+6}{2},\frac{1+5}{2}\right)=(4,3)$.
Współczynnik kierunkowy prostej AB jest równy $a_1=\frac{5-1}{6-2}=1$. Prosta CD jest do niej prostopadła, a więc jej współczynnik kierunkowy jest równy $a_2=-1$ i przechodzi przez punkt $D=(4,3)$. Równanie tej prostej możemy zapisać w postaci kierunkowej $y=-x+b$ i dalej $3=-4+b$, $b=7$, a stąd otrzymujemy $y=-x+7$.
Do obliczenia współrzędnych wierzchołka C wykorzystujemy fakt, że leży on na prostej CD i jego odległość od punktu D jest dana.
Możemy oznaczyć współrzędne wierzchołka $C=(x,-x+7)$ i wyznaczyć wysokość
$|CD|=\sqrt{(x-4)^2+(-x+7-3)^2}$.
Rozwiązujemy równanie $\frac{7}{\sqrt{2}}=\sqrt{(x-4)^2+(-x+7-3)^2}$:

$$\frac{49}{2}=2\cdot(x-4)^2$$
$$\frac{49}{4}=(x-4)^2$$
$$x-4=\frac{7}{2}\ \text{lub}\ x-4=-\frac{7}{2}$$
$$x=7\frac{1}{2}\ \text{lub}\ x=\frac{1}{2}$$

Wierzchołek C ma zatem współrzędne: $C=\left(7\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ lub $C=\left(\frac{1}{2},6\frac{1}{2}\right)$.

Warunek zadania spełnia tylko punkt $C=\left(\frac{1}{2},6\frac{1}{2}\right)$, a zatem jest on jedynym rozwiązaniem zadania.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 pkt

- Zdający wyznaczy współrzędne punktu $D=(4,3)$

albo

- obliczy współczynnik kierunkowy prostej AB: $a_1=\frac{5-1}{6-2}=1$ i wyznaczy równanie prostej CD: $y=-x+7$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt

- Zdający wyznaczy współrzędne punktu $D=(4,3)$ oraz obliczy współczynnik kierunkowy prostej A: $a_1=\frac{5-1}{6-2}=1$ i wyznaczy równanie prostej CD: $y=-x+7$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... **3 pkt**

- Zdający zapisze współrzędne wierzchołka $C = (x, -x+7)$ i zapisze równanie z jedną niewiadomą, np. $\frac{7}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x-4)^2 + (-x+7-3)^2}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania ..... **4 pkt**

- Zdający rozwiąże równanie $\frac{49}{2} = 2 \cdot (x-4)^2$ i otrzyma dwa rozwiązania $x_1 = 7\frac{7}{2}$ lub $x_2 = \frac{1}{2}$

albo

- rozwiąże zadanie do końca z usterkami rachunkowymi (także na wcześniejszych etapach).

Rozwiązanie pełne ..... **5 pkt**

- Zdający wyznaczy współrzędne wierzchołka $C = \left(7\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ lub $C = \left(\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}\right)$ oraz uwzględni, że warunki zadania spełnia tylko wierzchołek $C = \left(\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}\right)$.

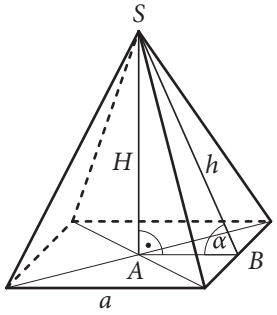
Zadanie 33. (0–4)

W ostrosłupie czworokątnym prawidłowym pole jednej ściany bocznej jest równe 12, a cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy $\frac{1}{3}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający: 4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami; 6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

Przykładowe rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia: a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa, H – wysokość ostrosłupa, h – wysokość ściany bocznej i α – kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.
Rysunek:



W $\triangle ABS$ wyznaczamy $\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}a}{h}$, a następnie zapisujemy równanie $\frac{\frac{1}{2}a}{h} = \frac{1}{3}$, skąd otrzymujemy $h = \frac{3}{2}a$.

Wykorzystujemy wzór na pole ściany bocznej: $\frac{1}{2}a \cdot h = 12$, z którego po podstawieniu $h = \frac{3}{2}a$, otrzymujemy $\frac{1}{2}a \cdot \frac{3}{2}a = 12$ i dalej $\frac{3}{4}a^2 = 12$, a stąd $a^2 = 16$, czyli $a = 4$. Ponieważ $h = \frac{3}{2}a$, więc $h = 6$.

Aby obliczyć wysokość H ostrosłupa, korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego ABS. Otrzymujemy: $H^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = h^2$.

I dalej: $H^2 + 2^2 = 6^2$

$H^2 = 32$

$H = 4\sqrt{2}$

Obliczamy objętość ostrosłupa: $V = \frac{1}{3}a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 4\sqrt{2} = \frac{64}{3}\sqrt{2}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ..... **1 pkt**

Zdający zapisze zależność pomiędzy długościami dwóch odcinków, wynikającą z podanej wartości cosinusa.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... **2 pkt**

Zdający obliczy długość krawędzi podstawy $a = 4$ lub wysokość ściany bocznej $h = 6$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... **3 pkt**

Zdający zapisze twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta ABS: $H^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = h^2$ i obliczy wysokość ostrosłupa $H = 4\sqrt{2}$.

Rozwiązanie pełne ..... **4 pkt**

Zdający obliczy objętość ostrosłupa $V = \frac{64}{3}\sqrt{2}$.