CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

| | |
|---|---|
| *Rodzaj dokumentu:* | **Zasady oceniania rozwiązań zadań** |
| *Egzamin:* | **Egzamin maturalny** |
| *Przedmiot:* | **Matematyka** |
| *Poziom:* | **Poziom rozszerzony** |
| *Formy arkusza:* | EMAP-R0-100, EMAP-R0-200,<br>EMAP-R0-300, EMAP-R0-400,<br>EMAP-R0-660, EMAP-R0-700,<br>EMAP-R0-K00, EMAP-R0-Q00 |
| *Termin egzaminu:* | 11 maja 2026 r. |

## ZADANIA ZAMKNIĘTE

### Zadanie 1. (0–1)

| Wymagania określone w podstawie programowej[1] | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>11.3R) korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

B

### Zadanie 2. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>5.3R) rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

A

### Zadanie 3. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>3.8R) rozwiązuje proste nierówności wymierne […]. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 27 sierpnia 2012 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. 2012 poz. 977).

**Rozwiązanie**
B

## Zadanie 4. (0–1)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>1.2R) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
A

### ZADANIE OTWARTE (KODOWANE)

## Zadanie 5. (0–2)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>5.1R) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym. |

**Zasady oceniania**
2 pkt – odpowiedź całkowicie poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 2 | 8 |

**ZADANIA OTWARTE (NIEKODOWANE)**

**Uwagi ogólne:**

**1.** Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
**2.** Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie $n$ jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

## Zadanie 6. (0–3)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>10.3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa. |

**Zasady oceniania**

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{1}{28}$.

2 pkt – wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych **oraz** wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A$, np. $|\Omega| = 8!$ oraz $|A| = 2 \cdot 6!$.

1 pkt – wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych, np. $|\Omega| = 8!$
*ALBO*
– zapisanie, że trzecim i szóstym wyrazem ciągu, który jest zdarzeniem elementarnym sprzyjającym zdarzeniu $A$, musi być liczba podzielna przez $3$,
*ALBO*
– wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A$, np. $|A| = 2 \cdot 6!$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

**1.** Jeżeli zdający zapisze, że trzecim i szóstym wyrazem ciągu, który jest zdarzeniem elementarnym sprzyjającym zdarzeniu $A$, musi być liczba podzielna przez $3$, ale – obliczając liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu $A$ – zapisze $|A| = 6!$ (lub $|A| = 2 \cdot 2 \cdot 6!$) oraz rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to może otrzymać **2 punkty**.
**2.** Jeżeli zdający zapisze $|\Omega| = \binom{8}{2}$ (lub $|\Omega| = 8 \cdot 7$) bez stosownego komentarza i na tym zakończy, to otrzymuje **0 punktów**.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie permutacje zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Jest to model klasyczny. Niech $\Omega$ oznacza zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych. Wówczas $|\Omega| = 8!$.

Iloczyn trzech liczb całkowitych jest podzielny przez $3$, gdy co najmniej jedna z tych liczb jest podzielna przez $3$. Wobec tego, aby iloczyn trzech kolejnych wyrazów ciągu był liczbą podzielną przez $3$, to jeden z tych trzech wyrazów musi być liczbą podzielną przez $3$.

W zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ są dokładnie dwie liczby podzielne przez $3$: $3$ oraz $6$.

Niech ciąg $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$ będzie zdarzeniem elementarnym, które sprzyja zdarzeniu $A$. W tym ciągu liczbowym znajdują się dokładnie dwie liczby podzielne przez $3$: $3$ oraz $6$. Zatem jedna z tych liczb znajduje się wśród wyrazów $a_1$, $a_2$, $a_3$ (gdyż iloczyn $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ jest podzielny przez $3$), a druga z nich znajduje się wśród wyrazów $a_6$, $a_7$, $a_8$ (gdyż iloczyn $a_6 \cdot a_7 \cdot a_8$ jest podzielny przez $3$), więc wyrazy $a_4$ oraz $a_5$ nie są podzielne przez $3$. Stąd i z tego, że iloczyny $a_3 \cdot a_4 \cdot a_5$ oraz $a_4 \cdot a_5 \cdot a_6$ są podzielne przez $3$, wynika, że wyrazy $a_3$ oraz $a_6$ muszą być podzielne przez $3$, tj. $\{a_3, a_6\} = \{3, 6\}$.

Jeżeli zdarzenie elementarne jest ciągiem, w którym trzecim i szóstym wyrazem są liczby $3$ oraz $6$, to iloczyn każdych trzech kolejnych wyrazów takiego ciągu jest liczbą podzielną przez $3$. Zatem takie zdarzenie elementarne sprzyja zdarzeniu $A$.

Dlatego zdarzeniu $A$ sprzyjają jedynie zdarzenia elementarne będące ciągami, których trzecim oraz szóstym wyrazem są liczby $3$ oraz $6$. Liczba wszystkich takich ciągów jest równa $|A| = 2 \cdot 6!$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia $A$:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2 \cdot 6!}{8!} = \frac{1}{28}$$

## Zadanie 7. (0–3)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| V. Rozumowanie i argumentacja. | Zdający:<br>2.1R) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$. |

**Zasady oceniania**

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania, tj.:

- przekształcenie nierówności $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$ do postaci $(x-y)^2 \geq 0$ (lub do postaci $\frac{(x-y)^2}{x^2y^2} \geq 0$) i zapisanie, że kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny

  *ALBO*

- przekształcenie nierówności $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$ do postaci $(x+y)(x-y)^2 \geq 0$ (lub do postaci $\frac{(x+y)(x-y)^2}{x^2y^2} \geq 0$) **oraz** uzasadnienie, że dla liczb dodatnich $x, y$ nierówność $(x+y)(x-y)^2 \geq 0$ (lub nierówność $\frac{(x+y)(x-y)^2}{x^2y^2} \geq 0$) jest prawdziwa,

  *ALBO*

- obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji $f$ **oraz** uzasadnienie, że funkcja $f$ osiąga wartość najmniejszą dla $x=y$ i obliczenie $f(y)$.

2 pkt – przekształcenie nierówności $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$ do postaci $x^2-2xy+y^2 \geq 0$ (lub do postaci $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2y^2} \geq 0$)

*ALBO*

– przekształcenie nierówności $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$ do postaci $(x+y)(x-y)^2 \geq 0$ (lub do postaci $\frac{(x+y)(x-y)^2}{x^2y^2} \geq 0$),

*ALBO*

– obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji $f$: $x=y$.

1 pkt – przekształcenie nierówności do postaci $W(x,y) \geq 0$ (lub do postaci $\frac{W(x,y)}{x^2y^2} \geq 0$), gdzie $W$ jest wielomianem zmiennych $x$ oraz $y$, np.:

$x^3+y^3-xy^2-x^2y \geq 0$, $x^3+y^3-xy(x+y) \geq 0$, $\frac{x^3+y^3-xy^2-x^2y}{x^2y^2} \geq 0$

*ALBO*

– przekształcenie nierówności do postaci $\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^2y^2} \geq \frac{x+y}{xy}$,

*ALBO*

– rozważenie funkcji $f(x)=\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ zmiennej dodatniej $x$ z parametrem $y>0$ **oraz** wyznaczenie pochodnej tej funkcji, np. $f'(x)=\frac{1}{y^2}-\frac{2y}{x^3}+\frac{1}{x^2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

1. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości $x$ i $y$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający przekształci nierówność do postaci $(x^2-y^2)(x-y)\geq 0$, a następnie uzasadni prawdziwość tej nierówności w przypadku, gdy $x>y$ oraz w przypadku, gdy $x<y$, a pominie przypadek $x=y$, to otrzymuje **2 punkty**.

**Przykładowe pełne rozwiązania**

*Sposób I (suma sześcianów)*

Z założenia $x>0$ oraz $y>0$, więc $x^2y^2>0$. Mnożymy obie strony nierówności $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leq\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$ przez $x^2y^2$ i otrzymujemy

$$xy^2+yx^2\leq x^3+y^3$$

Stosujemy wzór na sumę sześcianów oraz kwadrat różnicy i dostajemy:

$$xy(x+y)\leq(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$0\leq(x+y)(x^2-2xy+y^2)$$

$$0\leq(x+y)(x-y)^2$$

Ponieważ $(x+y)$ jest dodatnie jako suma dwóch liczb dodatnich $x$ oraz $y$, a ponadto $(x-y)^2$ jest nieujemne jako kwadrat liczby rzeczywistej $(x-y)$, więc $(x+y)(x-y)^2$ jest nieujemne jako iloczyn liczby dodatniej i nieujemnej. Zatem nierówność $0\leq(x+y)(x-y)^2$ jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej $x$ i dla każdej liczby dodatniej $y$. To oznacza, że dla każdej liczby dodatniej $x$ i każdej liczby dodatniej $y$ nierówność $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leq\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$ jest również prawdziwa.

To należało wykazać.

*Sposób II (grupowanie)*

Z założenia $x>0$ oraz $y>0$, więc $x^2y^2>0$. Mnożymy obie strony nierówności $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leq\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$ przez $x^2y^2$ oraz stosujemy wzór na różnicę kwadratów i otrzymujemy kolejno:

$$xy^2+yx^2\leq x^3+y^3$$

$$0\leq x^3-xy^2+y^3-yx^2$$

$$0\leq x(x^2-y^2)+y(y^2-x^2)$$

$$0 \leq (x-y)(x^2-y^2)$$

$$0 \leq (x-y)^2(x+y)$$

Ponieważ $(x+y)$ jest dodatnie jako suma dwóch liczb dodatnich $x$ oraz $y$, a ponadto $(x-y)^2$ jest nieujemne jako kwadrat liczby rzeczywistej $(x-y)$, więc $(x+y)(x-y)^2$ jest nieujemne jako iloczyn liczby dodatniej i nieujemnej. Zatem nierówność $0 \leq (x+y)(x-y)^2$ jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej $x$ i dla każdej liczby dodatniej $y$. To oznacza, że dla każdej liczby dodatniej $x$ i każdej liczby dodatniej $y$ nierówność $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$ jest również prawdziwa.
To należało wykazać.

*Sposób III*

Z założenia wynika, że $x \neq 0$ i $y \neq 0$, więc przekształcamy równoważnie nierówność $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$, rozszerzając odpowiednie ułamki i stosując wzór na różnicę kwadratów:

$$0 \leq \frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$$

$$0 \leq \frac{x^3}{x^2y^2}+\frac{y^3}{x^2y^2}-\frac{y^2x}{x^2y^2}-\frac{x^2y}{x^2y^2}$$

$$0 \leq \frac{x^3+y^3-y^2x-x^2y}{x^2y^2}$$

$$0 \leq \frac{x(x^2-y^2)+y(y^2-x^2)}{x^2y^2}$$

$$0 \leq \frac{(x-y)(x^2-y^2)}{x^2y^2}$$

$$0 \leq \frac{(x-y)^2(x+y)}{x^2y^2}$$

Ponieważ:

- $(x+y)$ jest dodatnie jako suma dwóch liczb dodatnich $x$ oraz $y$
- $(x-y)^2$ jest nieujemne jako kwadrat liczby rzeczywistej $(x-y)$
- $x^2y^2$ jest dodatnie jako iloczyn kwadratów liczb dodatnich $x$ oraz $y$,

więc $\frac{(x-y)^2(x+y)}{x^2y^2}$ jest nieujemne jako iloraz liczby nieujemnej $(x-y)^2(x+y)$ i liczby dodatniej $x^2y^2$. Zatem nierówność $0 \leq \frac{(x-y)^2(x+y)}{x^2y^2}$ jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej $x$ i dla każdej liczby dodatniej $y$. To oznacza, że dla każdej liczby dodatniej $x$ i każdej liczby dodatniej $y$ nierówność $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$ jest również prawdziwa.

To należało wykazać.

*Sposób IV (badanie funkcji)*

Rozważmy funkcję $f(x)=\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ zmiennej dodatniej $x$ z parametrem $y>0$.

Wyznaczamy pochodną funkcji $f$:

$$f'(x)=\frac{1}{y^2}-\frac{2y}{x^3}+\frac{1}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^3-2y^3+xy^2}{x^3y^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^3-y^3+xy^2-y^3}{x^3y^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)+y^2(x-y)}{x^3y^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x-y)(x^2+xy+2y^2)}{x^3y^2}$$

Ponieważ $x>0$ oraz $y>0$, więc $x^2+xy+2y^2>0$ i $x^3y^2>0$. Zatem:

- $f'(x)=0$ tylko dla $x=y$
- $f'(x)>0$ w przedziale $(y,+\infty)$
- $f'(x)<0$ w przedziale $(0,y)$.

Stąd funkcja $f$ jest malejąca w przedziale $(0,y]$ i jest rosnąca w przedziale $[y,+\infty)$. Zatem funkcja $f$ osiąga wartość najmniejszą dla $x=y$. Ponieważ $f(y)=\frac{y}{y^2}+\frac{y}{y^2}-\frac{1}{y}-\frac{1}{y}=0$, więc

$$\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\geq 0$$

czyli

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leq\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}$$

dla każdej liczby dodatniej $x$ i dla każdej liczby dodatniej $y$.
To należało wykazać.

## Zadanie 8. (0–3)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| V. Rozumowanie i argumentacja. | Zdający:<br>7.4R) rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności. |

**Zasady oceniania**

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – uzasadnienie, że odcinki $AL$ i $DK$ są prostopadłe (lub $AL$ i $KM$ są równoległe) i przedstawienie kompletnego rozumowania prowadzącego do wyznaczenia poprawnego równania z niewiadomą $|PQ|$ oraz zapisanie tego równania

*ALBO*

– przyjęcie bez uzasadnienia, że odcinki $AL$ i $DK$ są prostopadłe (lub $AL$ i $KM$ są równoległe) **oraz** przeprowadzenie pełnego rozumowania przy tym założeniu i otrzymanie tezy $|PQ| = \frac{\sqrt{5}}{5}a$,

*ALBO*

– obliczenie współrzędnych punktu $Q$: $Q = \left(\frac{4}{5}a, \frac{2}{5}a\right)$.

1 pkt – uzasadnienie, że odcinki $AL$ i $DK$ są prostopadłe (lub $AL$ i $KM$ są równoległe)

*ALBO*

– obliczenie długości boku $KM$ trójkąta $DKM$ i długości jednego z pozostałych dwóch boków tego trójkąta: $|KM| = \frac{\sqrt{5}}{4}a$, $|DK| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$, $|DM| = \frac{5}{4}a$,

*ALBO*

– obliczenie długości jednego z odcinków $AP$, $DP$ lub $PK$: $|AP| = \frac{1}{\sqrt{5}}a$, $|DP| = \frac{2}{\sqrt{5}}a$, $|PK| = \frac{1}{2\sqrt{5}}a$,

*ALBO*

– obliczenie współrzędnych punktu $P$: $P = \left(\frac{2}{5}a, \frac{1}{5}a\right)$,

*ALBO*

– uzasadnienie, że trójkąty $EKD$ i $MKD$ są przystające.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

**1.** Jeżeli zdający przyjmie błędne założenie (np. że miara kąta $AKD$ jest równa $60°$) i na tym opiera swoje rozumowanie, to otrzymuje **0 punktów**.

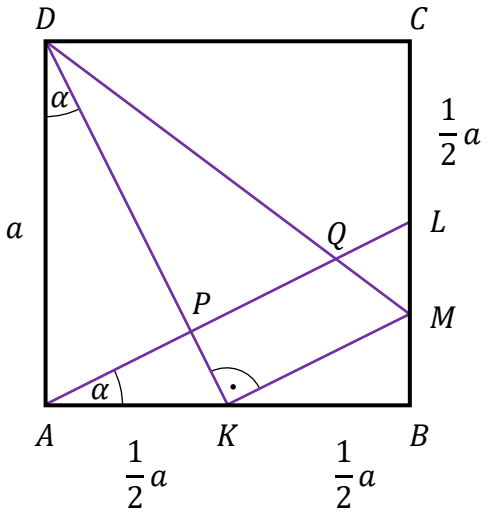
**2.** Jeżeli zdający uzasadni, że odcinki $AL$ i $DK$ są prostopadłe (lub $AL$ i $KM$ są równoległe), a w dalszej części rozwiązania popełni tylko jeden błąd rachunkowy, ale zrealizuje w pełni strategię rozwiązania zadania, otrzymując równanie z jedną niewiadomą $|PQ|$, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązania**

*Sposób I*

Oznaczmy miarę kąta $ADK$ przez $\alpha$. Wtedy $|\sphericalangle DKA| = 90° - \alpha$.

Ponieważ $|DA| = |AB| = a$, $|AK| = |BL| = \frac{a}{2}$ i kąty $DAK$ oraz $ABL$ są proste, więc trójkąty $DAK$ i $ABL$ są przystające (cecha bkb). Zatem $|\sphericalangle BAL| = |\sphericalangle ADK| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle ALB| = |\sphericalangle DKA| = 90° - \alpha$.




Stąd wynika, że miary kątów ostrych trójkąta $APK$ są równe miarom odpowiednich kątów ostrych trójkątów $DAK$ i $ABL$. To oznacza, że trójkąt $APK$ jest prostokątny i podobny do trójkątów $DAK$ oraz $DPA$, więc

$$\frac{|AD|}{|AK|} = \frac{|AP|}{|PK|} = \frac{|DP|}{|AP|} = 2$$

Stąd $|DP| = 2 \cdot |AP| = 2 \cdot (2 \cdot |PK|) = 4 \cdot |PK|$.

Kąt $DKM$ jest prosty i $|\sphericalangle KDM| = |\sphericalangle PDQ|$, więc trójkąty prostokątne $DKM$ oraz $DPQ$ są podobne, a skala podobieństwa jest równa

$$\frac{|DK|}{|DP|} = \frac{|DP| + |PK|}{|DP|} = \frac{5 \cdot |PK|}{4 \cdot |PK|} = \frac{5}{4}$$

Zatem $|PQ| = \frac{4}{5} \cdot |KM|$, a ponieważ trójkąt $KBM$ jest podobny do trójkąta $ABL$ w skali $1 : 2$, więc

$$|KM| = \frac{1}{2} \cdot |AL| = \frac{1}{2} \cdot |DK| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}a$$

i tym samym

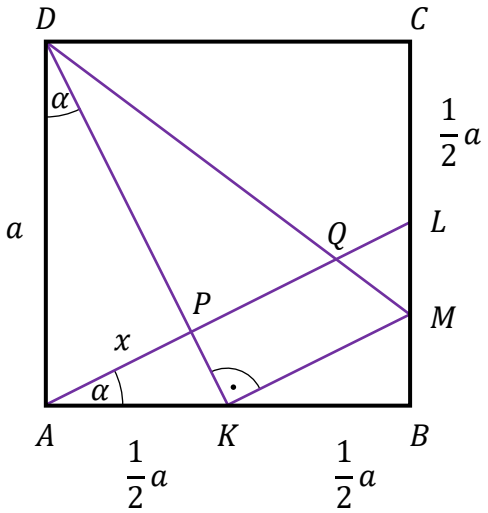
$$|PQ| = \frac{4}{5} \cdot |KM| = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}a = \frac{\sqrt{5}}{5}a$$

To należało wykazać.

*Sposób II*

Niech $x = |AP|$ oraz $\alpha = |\sphericalangle ADK|$. Wtedy $|\sphericalangle DKA| = 90° - \alpha$.

Ponieważ $|DA| = |AB| = a$, $|AK| = |BL| = \frac{a}{2}$ i kąty $DAK$ oraz $ABL$ są proste, więc trójkąty $DAK$ i $ABL$ są przystające (cecha bkb). Zatem $|\sphericalangle BAL| = |\sphericalangle ADK| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle ALB| = |\sphericalangle DKA| = 90° - \alpha$.




Kąty $DAP$ oraz $ALB$ są naprzemianległe i $AD \parallel BC$, więc $|\sphericalangle DAP| = |\sphericalangle ALB| = 90° - \alpha$. Zatem trójkąt $DPA$ jest prostokątny i podobny do trójkąta $DAK$. Stąd $\frac{|DP|}{|AD|} = \frac{|AP|}{|AK|}$, czyli $|DP| = \frac{|AD|}{|AK|} \cdot |AP| = 2 \cdot |AP| = 2x$.

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta $DAP$ otrzymujemy:

$$|AP|^2 + |DP|^2 = |AD|^2$$

$$x^2 + (2x)^2 = a^2$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Ponieważ kąt $DPA$ jest prosty, więc $AL \parallel KM$. Zatem trójkąty prostokątne $DKM$ i $DPQ$ oraz $ADK$ i $BKM$ są podobne. Skala podobieństwa trójkątów $ADK$ i $BKM$ jest równa $\frac{|AD|}{|BK|} = 2$, więc $|DK| = 2 \cdot |KM|$. Stąd z kolei wynika, że trójkąt $DKM$ jest podobny do trójkąta $DAK$, więc jest również podobny do trójkąta $DPA$. Zatem $|\sphericalangle KDM| = |\sphericalangle ADP| = \alpha$. Wobec tego trójkąty prostokątne $DPA$ i $DPQ$ są przystające (cecha kbk). Stąd

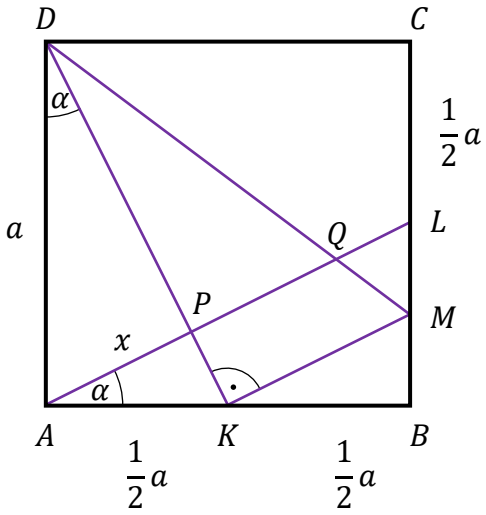
$$|PQ| = |AP| = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}a$$

To należało wykazać.

*Sposób III*

Niech $x = |AP|$ oraz $\alpha = |\sphericalangle ADK|$. Wtedy $|\sphericalangle DKA| = 90° - \alpha$.

Ponieważ $|DA| = |AB| = a$, $|AK| = |BL| = \frac{a}{2}$ i kąty $DAK$ oraz $ABL$ są proste, więc trójkąty $DAK$ i $ABL$ są przystające (cecha bkb). Zatem $|\sphericalangle BAL| = |\sphericalangle ADK| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle ALB| = |\sphericalangle DKA| = 90° - \alpha$.




Kąty $DAP$ oraz $ALB$ są naprzemianległe i $AD \parallel BC$, więc $|\sphericalangle DAP| = |\sphericalangle ALB| = 90° - \alpha$. Zatem trójkąt $DPA$ jest prostokątny i podobny do trójkąta $DAK$. Stąd $\frac{|DP|}{|AD|} = \frac{|AP|}{|AK|}$, czyli $|DP| = \frac{|AD|}{|AK|} \cdot |AP| = 2 \cdot |AP| = 2x$.

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta $DAP$ otrzymujemy:

$$|AP|^2 + |DP|^2 = |AD|^2$$

$$x^2 + (2x)^2 = a^2$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Ponieważ kąt $DPA$ jest prosty, więc $AL \parallel KM$. To oznacza, że $|\sphericalangle BKM| = |\sphericalangle BAL|$, więc trójkąty prostokątne $ADK$ i $BKM$ są podobne, a skala ich podobieństwa jest równa $\frac{|AD|}{|BK|} = 2$. Stąd $|MB| = \frac{1}{2} \cdot |AK| = \frac{1}{4}a$ oraz $|LM| = |BL| - |MB| = \frac{1}{4}a$.

Ponieważ $AD \parallel BC$, więc kąty naprzemianległe $ADQ$ i $QML$ mają równe miary. Z tej samej przyczyny kąty naprzemianległe $QAD$ i $QLM$ mają równe miary. Zatem trójkąty $AQD$ i $LQM$ są podobne, a skala ich podobieństwa jest równa $\frac{|AD|}{|LM|} = \frac{a}{\frac{1}{4}a} = 4$. Stąd

$$|LQ| = \frac{1}{4} \cdot (|AP| + |PQ|) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{5}a + |PQ|\right)$$

Ale $|LQ| + |AP| + |PQ| = |AL| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$, więc

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{5}a+|PQ|\right)+\frac{\sqrt{5}}{5}a+|PQ|=\frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$\frac{\sqrt{5}}{4}a+\frac{5}{4}\cdot|PQ|=\frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$|PQ|=\frac{\sqrt{5}}{5}a$$

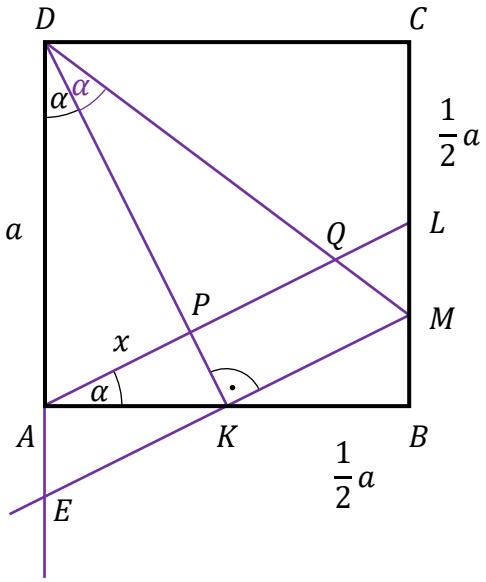
To należało wykazać.

*Sposób IV*

Oznaczmy przez $E$ punkt przecięcia prostych $AD$ i $KM$. Niech $x=|AP|$ oraz $\alpha=|\sphericalangle ADK|$. Wtedy $|\sphericalangle DKA|=90^\circ-\alpha$.

Ponieważ $|AK|=|BK|=\frac{a}{2}$ i kąty $KAE$ oraz $KBM$ są proste, a kąty $AKE$ i $BKM$ mają równe miary (gdyż są to kąty wierzchołkowe), więc trójkąty $AKE$ i $BKM$ są przystające (cecha kbk). Stąd mamy $|EK|=|KM|$, więc trójkąty prostokątne $DKE$ i $DKM$ są przystające (cecha bkb). Wobec tego $|\sphericalangle KDM|=|\sphericalangle KDE|=\alpha$.

Ponieważ $|DA|=|AB|=a$, $|AK|=|BL|=\frac{a}{2}$ i kąty $DAK$ oraz $ABL$ są proste, więc trójkąty $DAK$ i $ABL$ są przystające. Zatem $|\sphericalangle BAL|=|\sphericalangle ADK|=\alpha$ oraz $|\sphericalangle ALB|=|\sphericalangle DKA|=90^\circ-\alpha$.




Kąty $DAP$ oraz $ALB$ są naprzemianległe i $AD\parallel BC$, więc $|\sphericalangle DAP|=|\sphericalangle ALB|=90^\circ-\alpha$, czyli kąt $DPA$ jest prosty. Stąd $EM\parallel AL$, co oznacza, że trójkąty $APD$ i $QPD$ są przystające (cecha kbk) i wobec tego $|PQ|=|AP|=x$.

Trójkąty $DPA$ i $DAK$ mają kąty o miarach $\alpha$, $90^\circ-\alpha$ i $90^\circ$, więc są podobne (cecha kkk). Dlatego $\frac{|DP|}{|AD|}=\frac{|AP|}{|AK|}$, czyli $|DP|=\frac{|AD|}{|AK|}\cdot|AP|=2\cdot|AP|=2x$.

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta $DAP$ otrzymujemy:

$$|AP|^2 + |DP|^2 = |AD|^2$$

$$x^2 + (2x)^2 = a^2$$

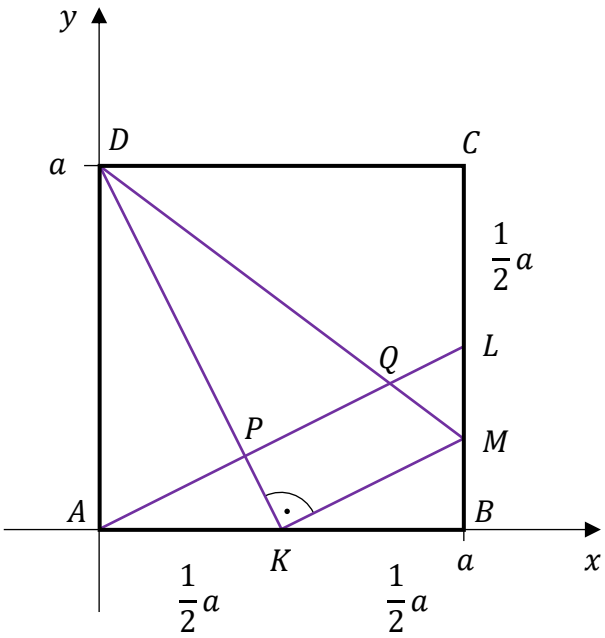
$$x = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

$$|PQ| = \frac{\sqrt{5}}{5}a$$

To należało wykazać.

*Sposób V (analitycznie)*

Umieszczamy kwadrat $ABCD$ w kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$ tak, żeby $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$, $C = (a, a)$, $D = (0, a)$ (zobacz rysunek).




Wówczas $K = \left(\frac{1}{2}a, 0\right)$ oraz $L = \left(a, \frac{1}{2}a\right)$.

Wyznaczamy równanie prostej $DK$:

$$y = \frac{0 - a}{\frac{1}{2}a - 0} \cdot (x - 0) + a$$

$$y = -2x + a$$

Wyznaczamy równanie prostej $AL$:

$$y = \frac{\frac{1}{2}a - 0}{a - 0} \cdot x$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

Wyznaczamy współrzędne punktu $P$:

$$\frac{1}{2}x = -2x + a$$

$$x = \frac{2}{5}a$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}a = \frac{1}{5}a$$

Zatem $P = \left(\frac{2}{5}a,\ \frac{1}{5}a\right)$.

Prosta $KM$ jest prostopadła do prostej $DK$, więc współczynnik kierunkowy w równaniu prostej $KM$ jest równy $\frac{1}{2}$. Zatem prosta $KM$ ma równanie $y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}a\right)$. Stąd druga współrzędna punktu $M$ jest równa $\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{4}a$, czyli $M = \left(a,\ \frac{1}{4}a\right)$.

Wyznaczamy równanie prostej $DM$:

$$y = \frac{\frac{1}{4}a - a}{a - 0} \cdot (x - 0) + a$$

$$y = -\frac{3}{4}x + a$$

Obliczamy współrzędne punktu $Q$, korzystając z równań prostych $AL$ i $DM$:

$$\frac{1}{2}x = -\frac{3}{4}x + a$$

$$x = \frac{4}{5}a$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}a = \frac{2}{5}a$$

Zatem $Q = \left(\frac{4}{5}a,\ \frac{2}{5}a\right)$.

Obliczamy długość odcinka $PQ$:

$$|PQ| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}a - \frac{2}{5}a\right)^2 + \left(\frac{2}{5}a - \frac{1}{5}a\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{25}}a = \frac{\sqrt{5}}{5}a$$

To należało wykazać.

## Zadanie 9. (0–4)

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>5.3) stosuje wzór na $n$-ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;<br>5.4) stosuje wzór na $n$-ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. |

**Zasady oceniania**

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $(-1\,026\,168)$.

3 pkt – obliczenie liczby $n$ wyrazów ciągu arytmetycznego: $n = 1014$.

2 pkt – rozwiązanie równania z jedną niewiadomą $r$: $r = 0$ oraz $r = -2$

*ALBO*

– obliczenie różnicy ciągu arytmetycznego $(a_n)$ spełniającej warunki zadania: $r = -2$,

*ALBO*

– rozwiązanie równania z jedną niewiadomą $q$: $q = 1$ oraz $q = 3$,

*ALBO*

– obliczenie ilorazu ciągu geometrycznego $(a_2, a_3, a_6)$ spełniającego warunki zadania: $q = 3$,

*ALBO*

– obliczenie/zapisanie, że ciąg $(a_2, a_3, a_6)$ nie jest stały i rozwiązanie równania z jedną niewiadomą $a_2$: $a_2 = -1$,

*ALBO*

– zapisanie równania z jedną niewiadomą $n$, np.

$$\left(1 + 2 \cdot \frac{-2026}{n - 1}\right)^2 = \left(1 + \frac{-2026}{n - 1}\right)\left(1 + 5 \cdot \frac{-2026}{n - 1}\right)$$

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą $r$, np. $(1 + 2r)^2 = (1 + r)(1 + 5r)$

*ALBO*

– zapisanie równania z jedną niewiadomą $q$, np. $3q - 3 = q^2 - q$,

*ALBO*

– zapisanie równania z jedną niewiadomą $a_2$, np. $a_2 = 1 + 2a_2$ (dla *sposobu III*),

*ALBO*

– wyznaczenie różnicy ciągu $(a_n)$ w zależności od liczby $n$ wyrazów ciągu arytmetycznego $(a_n)$: $r = \frac{-2026}{n-1}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

**1.** Jeżeli zdający myli ciąg arytmetyczny z ciągiem geometrycznym, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

**2.** Jeżeli zdający stosuje błędny wzór na $n$-ty wyraz ciągu arytmetycznego, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

**3.** Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe i otrzyma wartość $n$, która nie jest liczbą naturalną, to może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie (traktujemy to jak obliczenie liczby wyrazów ciągu arytmetycznego z błędem rachunkowym). Zdający nie otrzymuje punktu za obliczenie sumy wyrazów ciągu arytmetycznego.

**4.** a) Jeżeli zdający przyjmie, że $r = -2$ i sprawdzi rachunkiem, że ta wartość spełnia warunki zadania, ale nie uzasadni, że jest to jedyna wartość $r$ spełniająca warunki zadania, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za obliczenie $n$ oraz za obliczenie sumy).

b) Jeżeli zdający przyjmie bez uzasadnienia, że $r = -2$ i na tym opiera swoje rozwiązanie, to otrzymuje **0 punktów**.

**Przykładowe pełne rozwiązania**

*Sposób I*

Niech $r$ oznacza różnicę ciągu arytmetycznego $(a_n)$. Ze wzoru na $n$-ty wyraz ciągu arytmetycznego i własności ciągu geometrycznego otrzymujemy: $a_2 = 1 + r$, $a_3 = 1 + 2r$, $a_6 = 1 + 5r$ oraz $(a_3)^2 = a_2 \cdot a_6$. Stąd i z warunków zadania dostajemy:

$$(a_3)^2 = a_2 \cdot a_6$$

$$(1 + 2r)^2 = (1 + r)(1 + 5r)$$

$$0 = 2r + r^2$$

$$0 = r(2 + r)$$

$$r = 0 \quad \vee \quad r = -2$$

Dla $r = 0$ warunki zadania nie są spełnione, ponieważ pierwszy i ostatni wyraz ciągu arytmetycznego $(a_n)$ nie są równe.

Dla $r = -2$ otrzymujemy $a_2 = -1$, $a_3 = -3$, $a_6 = -9$. Ciąg $(-1, -3, -9)$ jest geometryczny, więc warunki zadania są spełnione.

Obliczamy liczbę $n$ wyrazów ciągu $(a_n)$:

$$-2025 = 1 + (n - 1) \cdot (-2)$$

$$n = 1014$$

Obliczamy sumę $S_{1014}$ wszystkich wyrazów ciągu $(a_n)$:

$$S_{1014} = \frac{1 + (-2025)}{2} \cdot 1014 = -1\,026\,168$$

*Sposób II*

Niech $r$ oznacza różnicę ciągu arytmetycznego $(a_n)$. Niech $q$ oznacza iloraz ciągu geometrycznego $(a_2, a_3, a_6)$. Ciąg arytmetyczny $(a_n)$ jest malejący, więc ciąg $(a_2, a_3, a_6)$ nie jest stały. Zatem $q \neq 1$ oraz $a_2 \neq 0$. Ze wzoru na $n$-ty wyraz ciągu geometrycznego i własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy: $a_3 = a_2 \cdot q$, $a_6 = a_2 \cdot q^2$ oraz $3(a_3 - a_2) = a_6 - a_3$. Stąd i z warunków zadania dostajemy:

$$3(a_3 - a_2) = a_6 - a_3$$

$$3a_2 \cdot q - 3a_2 = a_2 \cdot q^2 - a_2 \cdot q$$

$$0 = a_2 \cdot (q^2 - 4q + 3)$$

$$a_2 = 0 \quad \vee \quad q^2 - 4q + 3 = 0$$

$$a_2 = 0 \quad \vee \quad q = 1 \quad \vee \quad q = 3$$

Dla $a_2 = 0$ oraz dla $q = 1$ warunki zadania nie są spełnione, czyli $q = 3$. Zatem $a_3 = 3a_2$ , $a_6 = 9a_2$ .
Korzystamy z własności ciągu arytmetycznego i obliczamy $a_2$:

$$\frac{a_1 + a_3}{2} = a_2$$

$$\frac{1 + 3a_2}{2} = a_2$$

$$a_2 = -1$$

Ponieważ $a_1 = 1$ i $a_2 = -1$, więc różnica ciągu arytmetycznego jest równa $(-2)$.
Obliczamy liczbę $n$ wyrazów ciągu $(a_n)$:

$$-2025 = 1 + (n - 1) \cdot (-2)$$

$$n = 1014$$

Obliczamy sumę $S_{1014}$ wszystkich wyrazów ciągu $(a_n)$:

$$S_{1014} = \frac{1 + (-2025)}{2} \cdot 1014 = -1\,026\,168$$

*Sposób III*

Niech $r$ oznacza różnicę ciągu arytmetycznego $(a_n)$. Ze wzoru na $n$-ty wyraz ciągu arytmetycznego i własności ciągu geometrycznego otrzymujemy: $a_3 = a_2 + r$, $a_6 = a_2 + 4r$ oraz $(a_3)^2 = a_2 \cdot a_6$ . Stąd i z warunków zadania dostajemy:

$$(a_3)^2 = a_2 \cdot a_6$$

$$(a_2 + r)^2 = a_2 \cdot (a_2 + 4r)$$

$$a_2^2 + 2a_2 r + r^2 = a_2^2 + 4a_2 r$$

$$0 = r(2a_2 - r)$$

$$r = 0 \quad \vee \quad r = 2a_2$$

Dla $r = 0$ warunki zadania nie są spełnione, ponieważ pierwszy i ostatni wyraz ciągu arytmetycznego $(a_n)$ nie są równe.
Dla $r = 2a_2$ otrzymujemy $a_2 = 1 + 2a_2$ . Stąd $a_2 = -1$, więc $r = -2$. Zatem $a_3 = -3$ oraz $a_6 = -9$. Ciąg $(-1, -3, -9)$ jest geometryczny, więc warunki zadania są spełnione.

Obliczamy liczbę $n$ wyrazów ciągu $(a_n)$:

$$-2025 = 1 + (n-1) \cdot (-2)$$

$$n = 1014$$

Obliczamy sumę $S_{1014}$ wszystkich wyrazów ciągu $(a_n)$:

$$S_{1014} = \frac{1 + (-2025)}{2} \cdot 1014 = -1\,026\,168$$

## Zadanie 10. (0–4)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | Zdający:<br>6.6R) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne […]. |

### Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik, np.: $\frac{\pi k}{2}$ oraz $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$ oraz $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

3 pkt – przekształcenie równania do postaci alternatywy równań trygonometrycznych i rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy, np.:

- $(\sin(2x)=0$ lub $\cos^2(2x)=\frac{3}{4})$ oraz
  $x=\frac{\pi k}{2}$ (rozwiązania równania $\sin(2x)=0$)
- $(\sin(2x)=0$ lub $\cos(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $\cos(2x)=\frac{\sqrt{3}}{2})$ oraz
  $x=-\frac{5\pi}{12}+\pi k$ oraz $x=\frac{5\pi}{12}+\pi k$ (rozwiązania równania $\cos(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$)
- $(\sin(2x)=0$ lub $\cos(4x)=\frac{1}{2})$ oraz
  $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$ oraz $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$ (rozwiązania równania $\cos(4x)=\frac{1}{2}$)
- $(\sin(2x)=0$ lub $\sin(2x)=-\frac{1}{2}$ lub $\sin(2x)=\frac{1}{2})$ oraz
  $x=-\frac{\pi}{12}+\pi k$ oraz $x=-\frac{5\pi}{12}+\pi k$ (rozwiązania równania $\sin(2x)=-\frac{1}{2}$),

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

2 pkt – przekształcenie równania do postaci alternatywy równań trygonometrycznych, np.:
$\sin(2x)=0$ lub $\cos^2(2x)=\frac{3}{4}$,
$\sin(2x)=0$ lub $\cos(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $\cos(2x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\sin(2x)=0$ lub $2\cos(4x)-1=0$,
$\sin(2x)=0$ lub $4\sin^2(2x)-1=0$.

1 pkt – zastosowanie wzoru na sinus sumy i przekształcenie równania do postaci $\sin(4x)\cos(2x)+\cos(4x)\sin(2x)-2\sin(2x)=0$ (dla *sposobu I*)
*ALBO*
– zastosowanie wzoru na różnicę sinusów i przekształcenie równania do postaci $2\cos(4x)\sin(2x)-\sin(2x)=0$ (dla *sposobu II*),
*ALBO*
– zastosowanie wzoru na sinus potrojonego kąta i przekształcenie równania do postaci $-4\sin^3(2x)+3\sin(2x)-2\sin(2x)=0$ (dla *sposobu III*).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

**1. a)** Jeżeli zdający popełni błędy, które nie są rachunkowe, nie zrealizuje wymagań z kryterium za 1 punkt, przekształci równanie do postaci $\sin(2x)\cdot f(x)=0$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie (za rozwiązanie równania $\sin(2x)=0$).

**b)** Jeżeli zdający zrealizuje wymagania z kryterium za 1 punkt, a następnie popełni błędy, które nie są rachunkowe, przekształci równanie do postaci $\sin(2x)\cdot f(x)=0$ i rozwiąże równanie $\sin(2x)=0$, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

**2.** Jeżeli zdający popełni tylko błędy rachunkowe i przekształci równanie do postaci $\sin(2x)\cdot f(x)=0$, gdzie funkcja trygonometryczna $f$ nie ma miejsc zerowych lub równanie trygonometryczne $f(x)=0$ ma jedną serię rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych, oraz rozwiąże równanie $\sin(2x)=0$, otrzymując $x=\frac{\pi k}{2}$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył praw do innej punktacji.

**3.** Jeżeli zdający przyjmie $u=2x$ i rozwiąże równanie $\sin(3u)-2\sin u=0$ (lub równanie $-4\sin^3 u+3\sin u-2\sin u=0$) i na tym zakończy lub dalej popełni błędy, to otrzymuje **3 punkty**.

**Przykładowe pełne rozwiązania**

*Sposób I (poprzez sinus sumy)*

Przekształcamy równanie $\sin(6x)-2\sin(2x)=0$ równoważnie, stosując wzór na sinus sumy kątów i cosinus podwojonego kąta:

$$\sin(4x+2x)-2\sin(2x)=0$$

$$\sin(4x)\cos(2x)+\cos(4x)\sin(2x)-2\sin(2x)=0$$

$$2\sin(2x)\cos^2(2x)+[2\cos^2(2x)-1]\sin(2x)-2\sin(2x)=0$$

$$\sin(2x)\,[4\cos^2(2x)-3]=0$$

$$\sin(2x)=0 \quad \vee \quad \cos^2(2x)=\frac{3}{4}$$

$$\sin(2x)=0 \quad \vee \quad \cos(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \cos(2x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Rozwiązujemy równanie $\sin(2x)=0$:

$$2x=\pi k$$

$$x=\frac{\pi k}{2}$$

gdzie $k\in\mathbb{Z}$.

Rozwiązujemy równanie $\cos(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$2x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k \quad \vee \quad 2x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$$

$$x=\frac{5\pi}{12}+\pi k \quad \vee \quad x=-\frac{5\pi}{12}+\pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązujemy równanie $\cos(2x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$2x=\frac{\pi}{6}+2\pi k \quad \vee \quad 2x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$$

$$x=\frac{\pi}{12}+\pi k \quad \vee \quad x=-\frac{\pi}{12}+\pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązaniami równania $\sin(6x)-2\sin(2x)=0$ są wszystkie liczby postaci:
$\frac{\pi k}{2}$, $-\frac{5\pi}{12}+\pi k$, $\frac{5\pi}{12}+\pi k$, $-\frac{\pi}{12}+\pi k$ oraz $\frac{\pi}{12}+\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

*Sposób II (poprzez różnicę sinusów)*

Przekształcamy równanie $\sin(6x)-2\sin(2x)=0$ równoważnie, stosując wzór na różnicę sinusów:

$$\sin(6x)-\sin(2x)-\sin(2x)=0$$

$$2\cos\left(\frac{6x+2x}{2}\right)\sin\left(\frac{6x-2x}{2}\right)-\sin(2x)=0$$

$$2\cos(4x)\sin(2x)-\sin(2x)=0$$

$$\sin(2x)\left[2\cos(4x)-1\right]=0$$

$$\sin(2x)=0 \quad \vee \quad \cos(4x)=\frac{1}{2}$$

$$2x=\pi k \quad \vee \quad 4x=\frac{\pi}{3}+2\pi k \quad \vee \quad 4x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$$

$$x=\frac{\pi k}{2} \quad \vee \quad x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2} \quad \vee \quad x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązaniami równania $\sin(6x)-2\sin(2x)=0$ są wszystkie liczby postaci:
$\frac{\pi k}{2}$, $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$ oraz $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

*Sposób III (poprzez sinus potrojonego kąta)*

Przekształcamy równanie $\sin(6x)-2\sin(2x)=0$ równoważnie, stosując wzór na sinus potrojonego kąta:

$$\sin(3\cdot 2x)-2\sin(2x)=0$$

$$-4\sin^3(2x)+3\sin(2x)-2\sin(2x)=0$$

$$\sin(2x)\left[-4\sin^2(2x)+1\right]=0$$

$$\sin(2x) = 0 \quad \vee \quad \sin^2(2x) = \frac{1}{4}$$

$$\sin(2x) = 0 \quad \vee \quad \sin(2x) = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin(2x) = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pi k \quad \vee \quad 2x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \quad \vee \quad 2x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k \quad \vee \quad 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \vee \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi k}{2} \quad \vee \quad x = \frac{7\pi}{12} + \pi k \quad \vee \quad x = \frac{11\pi}{12} + \pi k \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{12} + \pi k \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązaniami równania $\sin(6x) - 2\sin(2x) = 0$ są wszystkie liczby postaci:
$\frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi}{12} + \pi k$, $\frac{5\pi}{12} + \pi k$, $\frac{7\pi}{12} + \pi k$ oraz $\frac{11\pi}{12} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

## Zadanie 11. (0–4)

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | Zdający:<br>9.4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami;<br>9.6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów […]. |

### Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $a = 3\sqrt{6}$ oraz $\cos\beta = \frac{5}{14}$.

3 pkt – obliczenie wysokości $x$ ściany bocznej opuszczonej na krawędź boczną ostrosłupa:
$x = \sqrt{42}$
*ALBO*
– obliczenie $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$: $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{3}{2\sqrt{7}}$,
*ALBO*
– obliczenie długości krawędzi podstawy: $a = 3\sqrt{6}$ **oraz** zapisanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi kątów $\alpha$ i $\beta$, np.
$1 = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot(1-\cos\beta)$, $1 = \sin^2\alpha\cdot\frac{1-\cos\beta}{1-\cos\alpha}$,
*ALBO*
– obliczenie cosinusa kąta $\beta$: $\cos\beta = \frac{5}{14}$.

2 pkt – obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa oraz $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$: $a = 3\sqrt{6}$ oraz $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3}$
*ALBO*
– zapisanie związków $\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ oraz $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{|EB|}{x}$,
*ALBO*
– obliczenie długości (lub kwadratu długości) $b$ krawędzi bocznej ostrosłupa: $b = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ (lub $b^2 = \frac{243}{4}$),
*ALBO*
– zapisanie zależności między długością krawędzi bocznej ostrosłupa i wysokością ściany bocznej opuszczoną na krawędź boczną ostrosłupa, np.: $\frac{x}{b} = \frac{2\sqrt{14}}{9}$,
$\frac{1}{2}\cdot b^2\cdot\frac{2\sqrt{14}}{9} = \frac{1}{2}b\cdot x$, $\left(\frac{5}{9}b\right)^2 + x^2 = b^2$,
*ALBO*
– zapisanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi kątów $\alpha$ i $\beta$, np.
$1 = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot(1-\cos\beta)$, $1 = \sin^2\alpha\cdot\frac{1-\cos\beta}{1-\cos\alpha}$.

1 pkt – obliczenie długości $a$ krawędzi podstawy ostrosłupa: $a = 3\sqrt{6}$
*ALBO*

– obliczenie $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$: $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{7}}{3}$,

*ALBO*

– obliczenie $\sin\alpha$: $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{14}}{9}$,

*ALBO*

– zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta $ABD$ i zapisanie równania

$$a^2=x^2+x^2-2x^2\cos\beta$$

*ALBO*

– zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta $BCS$ i zapisanie równania

$$a^2=b^2+b^2-2b^2\cos\alpha$$

*ALBO*

– zapisanie zależności między $a$, $x$ oraz $\alpha$, np. $\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{x}{a}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{x}{a}$,

*ALBO*

– zapisanie zależności między $b$, $x$ oraz $\alpha$, np. $\sin\alpha=\frac{x}{b}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

**1.** Jeżeli zdający poprawnie zinterpretuje kąt między krawędziami bocznymi ostrosłupa i zastosuje twierdzenie cosinusów do ściany bocznej – pomimo błędnie obliczonej długości krawędzi podstawy lub długości krawędzi bocznej – to traktujemy to jak spełnienie kryterium z myślnika piątego z kategorii za **1 punkt**.

**2.** Jeżeli zdający poprawnie zinterpretuje kąt między ścianami bocznymi ostrosłupa i zastosuje twierdzenie cosinusów do trójkąta z tym kątem – pomimo błędnie obliczonej długości krawędzi podstawy lub wysokości ściany bocznej poprowadzonej z wierzchołka podstawy ostrosłupa – to traktujemy to jak spełnienie kryterium z myślnika czwartego z kategorii za **1 punkt**.

**3.** Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt między krawędziami bocznymi ostrosłupa, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

**4.** Jeżeli zdający rozpatruje inną bryłę niż ostrosłup prawidłowy trójkątny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązania**

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$A$, $B$, $C$ – wierzchołki podstawy ostrosłupa,

$S$ – wierzchołek ostrosłupa,

$D$ – punkt wspólny wysokości ściany bocznej $BCS$ poprowadzonej z wierzchołka $B$ i wysokości ściany bocznej $ACS$ poprowadzonej z wierzchołka $A$,

$E$, $F$ – środki krawędzi – odpowiednio – $AB$ i $BC$,

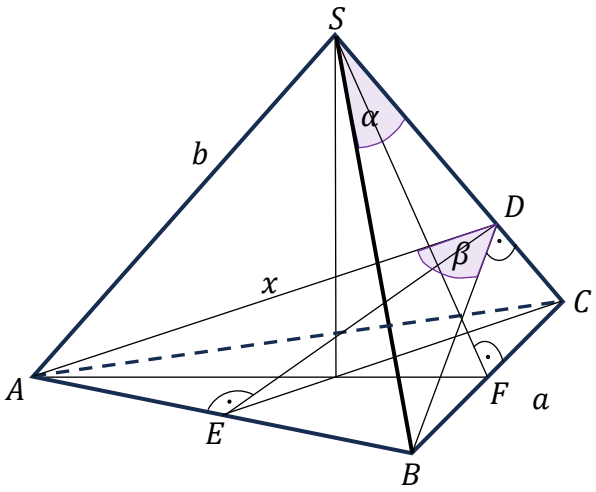
$\alpha$ – miara kąta $BSC$,

$\beta$ – miara kąta dwuściennego zawartego między ścianami bocznymi $BCS$ i $ACS$ ostrosłupa $ABCS$,

$a$ – długość krawędzi podstawy $ABC$,

$b$ – długość krawędzi bocznej,

$x$ – wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka podstawy $ABC$ (zobacz rysunek).




*Sposób I (z pominięciem krawędzi bocznej)*

Obliczamy promień $R$ okręgu opisanego na podstawie $ABC$:

$$2\pi R = 6\sqrt{2}\pi$$

$$R = 3\sqrt{2}$$

Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{2}$$

$$a = 3\sqrt{6}$$

Stosujemy wzór na cosinus podwojonego kąta i obliczamy $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$:

$$\cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

$$\frac{5}{9} = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3} \quad \text{v} \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

Ponieważ $\alpha < 180°$, więc $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Ponieważ $|\sphericalangle FCS| = 90° - \frac{\alpha}{2}$, więc $|\sphericalangle CBD| = \frac{\alpha}{2}$. Zatem:

$$\frac{x}{a} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$x = 3\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$x = \sqrt{42}$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta $ABD$ i obliczamy $\cos\beta$:

$$a^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos\beta$$

$$\left(3\sqrt{6}\right)^2 = 2 \cdot 42 - 2 \cdot 42\cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{5}{14}$$

*Sposób II (poprzez krawędź boczną)*

Obliczamy promień $R$ okręgu opisanego na podstawie $ABC$:

$$2\pi R = 6\sqrt{2}\pi$$

$$R = 3\sqrt{2}$$

Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{2}$$

$$a = 3\sqrt{6}$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta $BCS$ i obliczamy długość krawędzi bocznej:

$$\left(3\sqrt{6}\right)^2 = b^2 + b^2 - 2b \cdot b \cdot \cos\alpha$$

$$54 = 2b^2 - 2b^2 \cdot \frac{5}{9}$$

$$b = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta $BFS$ i obliczamy wysokość $SF$ ściany bocznej $BCS$:

$$|SF| = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$|SF| = \sqrt{\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{21}}{2}$$

Korzystamy z podobieństwa trójkątów $CDB$ oraz $BFS$ i obliczamy długość $BD$:

$$\frac{x}{a}=\frac{|SF|}{b}$$

$$x=a\cdot\frac{|SF|}{b}$$

$$x=3\sqrt{6}\cdot\frac{\frac{3\sqrt{21}}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{42}$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta $ABD$ i obliczamy $\cos\beta$:

$$a^2=x^2+x^2-2\cdot x\cdot x\cdot\cos\beta$$

$$\left(3\sqrt{6}\right)^2=2\cdot 42-2\cdot 42\cos\beta$$

$$\cos\beta=\frac{5}{14}$$

*Sposób III (poprzez $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$)*

Obliczamy promień $R$ okręgu opisanego na podstawie $ABC$:

$$2\pi R=6\sqrt{2}\pi$$

$$R=3\sqrt{2}$$

Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{a\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{2}$$

$$a=3\sqrt{6}$$

Stosujemy wzór na cosinus podwojonego kąta i obliczamy $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$:

$$\cos\alpha=2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1$$

$$\frac{5}{9}=2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{7}}{3}\quad\vee\quad\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=-\frac{\sqrt{7}}{3}$$

Ponieważ $\alpha<180°$, więc $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Ponieważ $|\sphericalangle FCS|=90°-\frac{\alpha}{2}$, więc $|\sphericalangle CBD|=\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{x}{a}=\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Stąd i ze związku $\frac{|EB|}{x}=\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$ otrzymujemy:

$$\frac{|EB|}{a} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{3}{2\sqrt{7}}$$

Obliczamy $\cos\beta$:

$$\cos\beta = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\cos\beta = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2\sqrt{7}}\right)^2$$

$$\cos\beta = \frac{5}{14}$$

*Sposób IV*

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta $BDA$ i otrzymujemy:

$$a^2 = x^2 + x^2 - 2x \cdot x \cdot \cos\beta$$

$$a^2 = 2x^2(1 - \cos\beta)$$

Z trójkąta prostokątnego $BDS$ otrzymujemy $\frac{x}{b} = \sin\alpha$, więc $x = b \cdot \sin\alpha$ i dlatego

$$a^2 = 2b^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot (1 - \cos\beta)$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta $BCS$ i otrzymujemy:

$$a^2 = b^2 + b^2 - 2b \cdot b \cdot \cos\alpha$$

$$a^2 = 2b^2(1 - \cos\alpha)$$

Stąd i z zależności $a^2 = 2b^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot (1 - \cos\beta)$ otrzymujemy:

$$2b^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot (1 - \cos\beta) = 2b^2(1 - \cos\alpha)$$

$$1 - \cos\beta = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$1 - \cos\beta = \frac{1 - \cos\alpha}{1 - \cos^2\alpha}$$

$$1 - \cos\beta = \frac{1}{1 + \cos\alpha}$$

$$\cos\beta = \frac{\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{5}{9}}{1+\frac{5}{9}} = \frac{5}{14}$$

Obliczamy promień $R$ okręgu opisanego na podstawie $ABC$:

$$2\pi R = 6\sqrt{2}\pi$$

$$R = 3\sqrt{2}$$

Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{2}$$

$$a = 3\sqrt{6}$$

## Zadanie 12. (0–5)

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | Zdający:<br>8.3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt.<br>8.7R) oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach. |

**Zasady oceniania** (dla *sposobu I*)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\left(y+\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{5}$.

4 pkt – obliczenie współrzędnych punktów $C$ oraz $M$: $C=(2,1)$ oraz $M=\left(\frac{6}{5},-\frac{3}{5}\right)$

*ALBO*

– obliczenie współrzędnych punktu $C$ oraz długości odcinka $MC$: $C=(2,1)$ oraz $|MC|=\frac{4}{\sqrt{5}}$.

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktu $C$: $C=(2,1)$

*ALBO*

– zapisanie równania z jedną niewiadomą (pierwszą lub drugą współrzędną punktu $C$), **oraz** wyznaczenie współrzędnych punktu $M$ w zależności od współrzędnych punktów $A$ oraz $C$, np. $6x_C+2\cdot\left(-\frac{1}{2}x_C+2\right)-14=0$ oraz $x_M=\frac{1}{5}(x_C-x_A)+x_A$ oraz $y_M=\frac{1}{5}(y_C-y_A)+y_A$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (pierwszą lub drugą współrzędną punktu $C$), np. $6x_C+2\cdot\left(-\frac{1}{2}x_C+2\right)-14=0$, $6(4-2y_C)+2y_C-14=0$

*ALBO*

– wyznaczenie równania stopnia pierwszego symetralnej boku $AB$ trójkąta **oraz** wyznaczenie współrzędnych punktu $M$ w zależności od współrzędnych punktów $A$ oraz $C$, np.

$6x+2y-14=0$ oraz $x_M=\frac{1}{5}(x_C-x_A)+x_A$ oraz $y_M=\frac{1}{5}(y_C-y_A)+y_A$.

1 pkt – wyznaczenie równania stopnia pierwszego symetralnej boku $AB$ trójkąta, np. $6x+2y-14=0$

*ALBO*

– zapisanie współrzędnych punktu $C$ w zależności od jednej zmiennej, np. $C=\left(x_C,-\frac{1}{2}x_C+2\right)$,

*ALBO*

– wyznaczenie współrzędnych punktu $M$ w zależności od współrzędnych punktów $A$ oraz $C$, np. $x_M=\frac{1}{5}(x_C-x_A)+x_A$ oraz $y_M=\frac{1}{5}(y_C-y_A)+y_A$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

**1.** Jeżeli zdający zapisze współrzędne punktu $C = (2, 1)$ oraz uzasadni (np. rachunkowo), że ten punkt spełnia warunki zadania, to za tę część rozwiązania otrzymuje **3 punkty**. Jeżeli zdający takiego uzasadnienia nie zapisze, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

**2. a)** Jeżeli zdający przyjmuje $|AM| : |MC| = 4 : 1$, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.

**b)** Jeżeli zdający przyjmuje stosunek $|AM| : |MC|$ inny niż $1 : 4$ lub $4 : 1$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

**3.** Jeżeli zdający przyjmie bez uzasadnienia, że prosta $AC$ jest prostopadła do prostej $BC$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za zapisanie współrzędnych punktu $C$ w zależności od jednej zmiennej lub wyznaczenie/obliczenie współrzędnych punktu $M$ w zależności od współrzędnych punktów $A$ oraz $C$, oraz 1 punkt za konsekwentne rozwiązanie zadania do końca).

**Zasady oceniania** (dla *sposobu II*)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\left(y+\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{5}$.

4 pkt – obliczenie współrzędnych punktu $M$ oraz współrzędnych wektora $\overrightarrow{AM}$ (lub współrzędnych wektora $\overrightarrow{MC}$): $M=\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ oraz $\overrightarrow{AM}=\left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right]$ (lub $\overrightarrow{MC}=\left[\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right]$).

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktu $D$ **oraz** wyznaczenie równania prostej $ME$:
$D=\left(\frac{13}{10}, -\frac{9}{10}\right)$ oraz np. $y=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{8}{5}\right)-\frac{4}{5}$
*ALBO*
– obliczenie współrzędnych punktu $E$ **oraz** wyznaczenie równania prostej $MD$:
$E=\left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ oraz np. $y=-3\left(x-\frac{13}{10}\right)-\frac{9}{10}$.

2 pkt – obliczenie współrzędnych punktów $D$ oraz $E$: $D=\left(\frac{13}{10}, -\frac{9}{10}\right)$ oraz $E=\left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$
*ALBO*
– wyznaczenie równania prostej $MD$, np. $y=-3\left(x-\frac{13}{10}\right)-\frac{9}{10}$,
*ALBO*
– wyznaczenie równania prostej $ME$, np. $y=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{8}{5}\right)-\frac{4}{5}$.

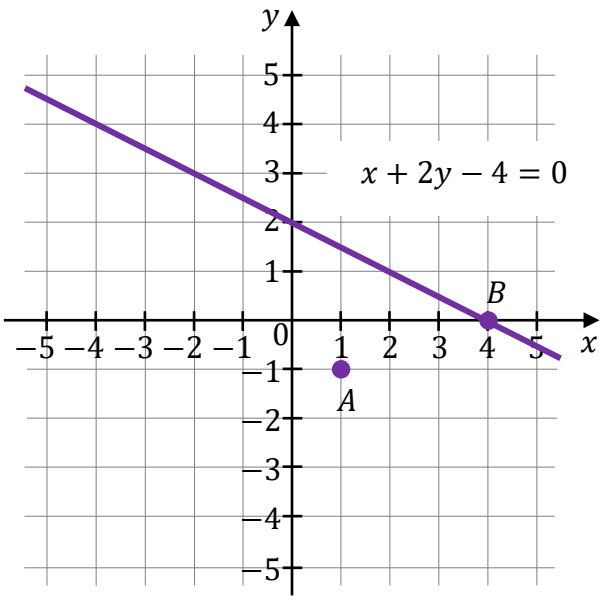
1 pkt – obliczenie współrzędnych punktu $D$: $D=\left(\frac{13}{10}, -\frac{9}{10}\right)$
*ALBO*
– obliczenie współrzędnych punktu $E$: $E=\left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązania**

*Sposób I*

Zauważmy, że punkt $A$ nie leży na prostej $x + 2y - 4 = 0$, natomiast punkt $B$ leży na tej prostej. Zatem w tej prostej zawiera się ramię $BC$ trójkąta $ABC$.




Niech $C = (x_C, y_C)$. Wówczas $y_C = -\frac{1}{2}x_C + 2$. Ponieważ $|CA| = |CB|$, więc

$$|CA|^2 = |CB|^2$$

$$(1 - x_C)^2 + (-1 - y_C)^2 = (4 - x_C)^2 + (0 - y_C)^2$$

$$1 - 2x_C + x_C^2 + 1 + 2y_C + y_C^2 = 16 - 8x_C + x_C^2 + y_C^2$$

$$6x_C + 2y_C - 14 = 0$$

$$6x_C + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x_C + 2\right) - 14 = 0$$

$$x_C = 2$$

Zatem $C = (2, 1)$.

Niech $M = (x_M, y_M)$. Z warunków zadania wynika, że $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{AC}$. Obliczamy współrzędne punktu $M$:

$$[x_M - 1, y_M - (-1)] = \frac{1}{5} \cdot [2 - 1, 1 - (-1)]$$

$$x_M - 1 = \frac{1}{5} \quad \wedge \quad y_M + 1 = \frac{2}{5}$$

Zatem $M = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

Obliczamy kwadrat promienia okręgu, który przechodzi przez punkt $C$ i ma środek w punkcie $M$:

$$|MC|^2 = \left(2-\frac{6}{5}\right)^2 + \left(1+\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{80}{25} = \frac{16}{5}$$

Równanie okręgu, który przechodzi przez punkt $C$ i ma środek w punkcie $M$, ma postać

$$\left(x-\frac{6}{5}\right)^2 + \left(y+\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$$

*Sposób II*

Niech $D = (x_D, y_D)$ będzie punktem przecięcia prostej $AB$ z prostą, która jest prostopadła do $AB$ i przechodzi przez punkt $M$.

Niech $E = (x_E, y_E)$ będzie punktem przecięcia prostej $AB$ z prostą, która jest równoległa do $BC$ i przechodzi przez punkt $M$.

Zauważmy, że punkt $A$ nie leży na prostej $x + 2y - 4 = 0$, natomiast punkt $B$ leży na tej prostej. Zatem w tej prostej zawiera się ramię $BC$ trójkąta $ABC$.

Z warunków zadania oraz twierdzenia Talesa otrzymujemy:

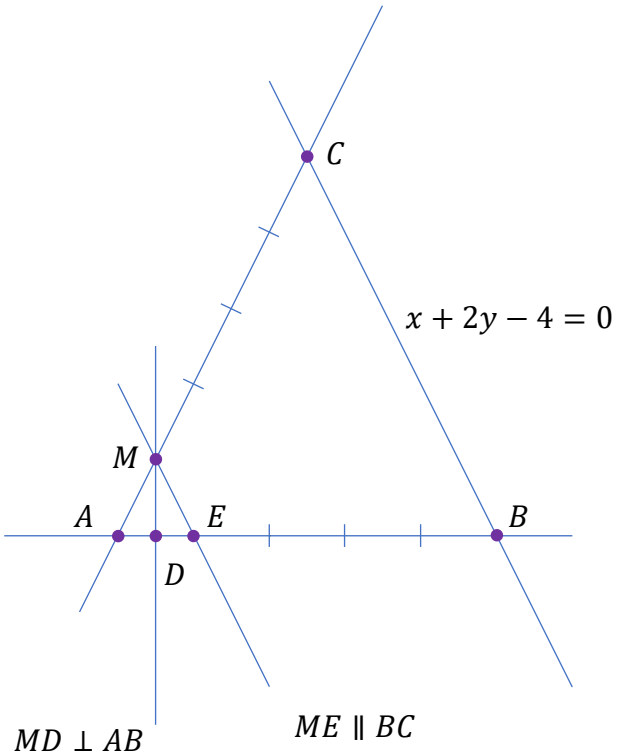
$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$[x_E - 1, y_E - (-1)] = \frac{1}{5}\cdot[4-1, 0-(-1)]$$

$$x_E - 1 = \frac{3}{5} \quad \wedge \quad y_E + 1 = \frac{1}{5}$$

Stąd $E = \left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

Zatem prosta $ME$ ma równanie $y = -\frac{1}{2}\left(x-\frac{8}{5}\right) - \frac{4}{5}$, czyli $y = -\frac{1}{2}x$.



Ponieważ $ME \parallel BC$, więc trójkąt $AME$ jest równoramienny i $|AM| = |ME|$. Stąd prosta $MD$ jest symetralną odcinka $AE$. Zatem punkt $D$ dzieli odcinek $AB$ w stosunku $1:9$ (licząc od punktu $A$). Obliczamy współrzędne punktu $D$:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{10} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$[x_D - 1, y_D - (-1)] = \frac{1}{10} \cdot [4 - 1, 0 - (-1)]$$

$$x_D - 1 = \frac{3}{10} \quad \wedge \quad y_D + 1 = \frac{1}{10}$$

Stąd $D = \left(\frac{13}{10}, -\frac{9}{10}\right)$.

Współczynnik kierunkowy $a_{AB}$ prostej $AB$ jest równy $a_{AB} = \frac{0-(-1)}{4-1} = \frac{1}{3}$, więc prosta $MD$ ma równanie $y = -3\left(x - \frac{13}{10}\right) - \frac{9}{10}$, czyli $y = -3x + 3$.

Obliczamy współrzędne punktu $M$:

$$-\frac{1}{2}x = -3x + 3$$

$$x = \frac{6}{5}$$

Stąd $M = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

Z warunków zadania

$$\overrightarrow{MC} = 4 \cdot \overrightarrow{AM} = 4 \cdot \left[\frac{6}{5} - 1, -\frac{3}{5} - (-1)\right] = \left[\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right]$$

Obliczamy kwadrat promienia okręgu, który przechodzi przez punkt $C$ i ma środek w punkcie $M$:

$$\left|\overrightarrow{MC}\right|^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$$

Równanie okręgu, który przechodzi przez punkt $C$ i ma środek w punkcie $M$, ma postać

$$\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$$

## Zadanie 13. (0–5)

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | Zdający:<br>3.2R) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem.<br>4.12) wykorzystuje własności funkcji kwadratowej liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych […]. |

**Zasady oceniania** (dla *sposobu I*)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $(1, +\infty)$.

4 pkt – rozwiązanie pięciu warunków 1) – 5) określonych w kryterium za 1 punkt.

3 pkt – rozwiązanie czterech spośród warunków 1) – 5) określonych w kryterium za 1 punkt.

2 pkt – rozwiązanie trzech spośród warunków 1) – 5) określonych w kryterium za 1 punkt.

1 pkt – zapisanie wszystkich warunków 1) – 5):

1) $f(p) < 0$ (lub $q < 0$, lub $\Delta > 0$),
2) $p > -2$,
3) $p < 2$,
4) $f(-2) > 0$,
5) $f(2) > 0$,

*ALBO*

– rozwiązanie jednego z warunków 1) – 5):

1) $f(p) < 0$ (lub $q < 0$, lub $\Delta > 0$): $m \in (0, +\infty)$,
2) $p > -2$: $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$,
3) $p < 2$: $m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$,
4) $f(-2) > 0$: $m \in \mathbb{R}$,
5) $f(2) > 0$: $m \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

**1.** Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

**2.** Jeżeli zdający:

a) nie rozwiąże wszystkich warunków 1) – 5) określonych w kryterium za 1 punkt albo
b) podczas rozwiązywania warunków 1) – 5) popełni błędy rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, których część wspólna jest zbiorem pustym, albo
c) popełni błąd, który nie jest rachunkowy,

to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

**Zasady oceniania** (dla *sposobu II*)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $(1, +\infty)$.

4 pkt – rozwiązanie pięciu warunków I) – V) określonych w kryterium za 2 punkty

*ALBO*

– spełnienie warunków I) **oraz** III), **oraz** IV), **oraz** zapisanie $x_1 < x_2$.

3 pkt – spełnienie czterech spośród warunków I) – V) określonych w kryterium za 2 punkty

*ALBO*

– spełnienie warunków I) **oraz** III), **oraz** zapisanie $x_1 < x_2$ ,

*ALBO*

– spełnienie warunków I) **oraz** IV), **oraz** zapisanie $x_1 < x_2$ ,

*ALBO*

– spełnienie warunków III) **oraz** IV), **oraz** zapisanie $x_1 < x_2$.

2 pkt – spełnienie warunku I) i jednego z warunków II) – V):

I) wyznaczenie wszystkich wartości parametru $m$, dla których funkcja $f$ ma dokładnie dwa miejsca zerowe oraz wyznaczenie miejsc zerowych $x_1$ oraz $x_2$ funkcji $f$ w zależności od $m$: $m \in (0, +\infty)$ i $x_1 = \frac{1-\sqrt{m}}{m}$ oraz $x_2 = \frac{1+\sqrt{m}}{m}$,

II) rozwiązanie nierówności $x_1 < 2$: $m \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$,

III) rozwiązanie nierówności $-2 < x_1$ : $m \in (0, +\infty)$,

IV) rozwiązanie nierówności $x_2 < 2$: $m \in (1, +\infty)$,

V) rozwiązanie nierówności $-2 < x_2$ : $m \in (0, +\infty)$,

*ALBO*

– spełnienie trzech spośród warunków II) – V).

1 pkt – wyznaczenie wszystkich wartości parametru $m$, dla których funkcja $f$ ma dokładnie dwa miejsca zerowe: $m \in (0, +\infty)$

*ALBO*

– wyznaczenie miejsc zerowych funkcji $f$ w zależności od $m$: $x_1 = \frac{1-\sqrt{m}}{m}$ oraz $x_2 = \frac{1+\sqrt{m}}{m}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

**1.** Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

**2.** Jeżeli zdający:

a) nie rozwiąże wszystkich warunków I) – V) określonych w kryterium za 1 punkt albo

b) podczas rozwiązywania warunków I) – V) popełni błędy rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, których część wspólna jest zbiorem pustym, albo

c) popełni błąd, który nie jest rachunkowy,

to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

**Zasady oceniania** (dla *sposobu III*)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $(1, +\infty)$.

4 pkt – rozwiązanie pięciu warunków A) – E) określonych w kryterium za 1 punkt.

3 pkt – rozwiązanie czterech warunków spośród warunków A) – E) określonych w kryterium za 1 punkt.

2 pkt – rozwiązanie trzech warunków spośród warunków A) – E) określonych w kryterium za 1 punkt.

1 pkt – zapisanie warunków A) – E):

A) $\Delta > 0$,

B) $x_1 + 2 + x_2 + 2 > 0$,

C) $x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$,

D) $2 - x_1 + 2 - x_2 > 0$,

E) $x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$,

*ALBO*

– rozwiązanie jednego z warunków A) – E):

A) $\Delta > 0$: $m \in (0, +\infty)$,

B) $x_1 + 2 + x_2 + 2 > 0$: $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$,

C) $x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$: $m \neq 0$,

D) $2 - x_1 + 2 - x_2 > 0$: $m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$,

E) $x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$: $m \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

**1.** Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

**2.** Jeżeli zdający:

a) nie rozwiąże wszystkich warunków A) – E) określonych w kryterium za 1 punkt albo

b) podczas rozwiązywania warunków A) – E) popełni błędy rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, których część wspólna jest zbiorem pustym, albo

c) popełni błąd, który nie jest rachunkowy,

to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązania**

*Sposób I (poprzez interpretację geometryczną)*

Ponieważ $m \neq 0$, więc współczynnik przy $x^2$ jest dodatni. Zatem parabola, która jest wykresem funkcji $f$, ma ramiona skierowane ku górze.

Stąd funkcja $f$ ma dokładnie dwa miejsca zerowe należące do przedziału $(-2, 2)$ tylko wtedy, gdy spełnione będą następujące warunki:

1) $f(p) < 0$ (lub $q < 0$, lub $\Delta > 0$)

2) $p > -2$

3) $p < 2$

4) $f(-2) > 0$

5) $f(2) > 0$.

Rozwiązujemy warunek 1):

$$f(p) < 0$$

$$f\left(\frac{1}{m}\right) < 0$$

$$m^2 \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^2 - 2m \cdot \frac{1}{m} - m + 1 < 0$$

$$-m < 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \in (0, +\infty)$$

Warunki 2) oraz 3) można rozwiązać za pomocą nierówności podwójnej:

$$p \in (-2, 2)$$

$$-2 < -\frac{-2m}{2m^2} < 2$$

$$-2 < \frac{1}{m} < 2$$

$$\frac{1}{|m|} < 2$$

$$|m| > \frac{1}{2} \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Rozwiązujemy warunek 4):

$$f(-2) > 0$$

$$m^2 \cdot (-2)^2 - 2m \cdot (-2) - m + 1 > 0$$

$$4m^2 + 3m + 1 > 0$$

$$\left(2m + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} > 0$$

$$m \in \mathbb{R}$$

Rozwiązujemy warunek 5):

$$f(2) > 0$$

$$m^2 \cdot 2^2 - 2m \cdot 2 - m + 1 > 0$$

$$4m^2 - 5m + 1 > 0$$

$$4(m-1)\left(m - \frac{1}{4}\right) > 0$$

$$m \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty)$$

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru $m$, które jednocześnie spełniają warunki 1) – 5) oraz $m \neq 0$: $m \in (1, +\infty)$.

Funkcja $f$ ma dwa różne miejsca zerowe należące do przedziału $(-2, 2)$ tylko wtedy, gdy $m \in (1, +\infty)$.

*Sposób II (poprzez wyznaczenie miejsc zerowych)*

Przy $m \neq 0$ funkcja $f$ ma dokładnie dwa miejsca zerowe $x_1$ , $x_2$ należące do przedziału $(-2, 2)$, gdy spełnione są następujące warunki:

I) $\Delta > 0$
II) $x_1 < 2$
III) $-2 < x_1$
IV) $x_2 < 2$
V) $-2 < x_2$ .

Rozwiązujemy nierówność $b^2 - 4ac > 0$:

$$(-2m)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot (-m + 1) > 0$$

$$4m^3 > 0$$

$$m \in (0, +\infty)$$

Wtedy miejsca zerowe są równe:

$$x_1 = \frac{2m - 2m \cdot \sqrt{m}}{2m^2} = \frac{1 - \sqrt{m}}{m}$$

oraz

$$x_2 = \frac{2m + 2m \cdot \sqrt{m}}{2m^2} = \frac{1 + \sqrt{m}}{m}$$

Rozwiązujemy nierówność $-2 < x_1 < 2$:

$$-2 < \frac{1 - \sqrt{m}}{m} < 2$$

$$\left(-2m < 1 - \sqrt{m} \quad \wedge \quad m > 0\right) \quad \wedge \quad \left(1 - \sqrt{m} < 2m \quad \wedge \quad m > 0\right)$$

$$\left(2m - \sqrt{m} + 1 > 0 \quad \wedge \quad m > 0\right) \wedge \left(2m + \sqrt{m} - 1 > 0 \quad \wedge \quad m > 0\right)$$

$$\left(2\left(\sqrt{m} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \quad \wedge \quad m > 0\right) \quad \wedge \quad \left(2\left(\sqrt{m} + 1\right)\left(\sqrt{m} - \frac{1}{2}\right) > 0 \quad \wedge \quad m > 0\right)$$

$$m > 0 \quad \wedge \quad \left(\left(\sqrt{m} < -1 \ \vee \ \sqrt{m} > \frac{1}{2}\right) \quad \wedge \quad m > 0\right)$$

$$m > 0 \quad \wedge \quad \left(m > \frac{1}{4} \quad \wedge \quad m > 0\right)$$

$$m \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

Rozwiązujemy nierówność $-2 < x_2 < 2$:

$$-2 < \frac{1+\sqrt{m}}{m} < 2$$

$$\left(-2m < 1+\sqrt{m} \quad \wedge \quad m > 0\right) \quad \wedge \quad \left(1+\sqrt{m} < 2m \quad \wedge \quad m > 0\right)$$

$$\left(2m+\sqrt{m}+1 > 0 \quad \wedge \quad m > 0\right) \wedge \left(2m-\sqrt{m}-1 > 0 \quad \wedge \quad m > 0\right)$$

$$\left(2\left(\sqrt{m}+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8} > 0 \quad \wedge \quad m > 0\right) \quad \wedge \quad \left(2\left(\sqrt{m}-1\right)\left(\sqrt{m}+\frac{1}{2}\right) > 0 \quad \wedge \quad m > 0\right)$$

$$m > 0 \quad \wedge \quad \left(\left(\sqrt{m} < -\frac{1}{2} \vee \sqrt{m} > 1\right) \quad \wedge \quad m > 0\right)$$

$$m > 0 \quad \wedge \quad (m > 1 \quad \wedge \quad m > 0)$$

$$m \in (1, +\infty)$$

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru $m$, które jednocześnie spełniają warunki I) – V) oraz $m \neq 0$: $m \in (1, +\infty)$.

Funkcja $f$ ma dwa różne miejsca zerowe należące do przedziału $(-2, 2)$ tylko wtedy, gdy $m \in (1, +\infty)$.

Uwaga.
Wszystkie wartości $m$, dla których funkcja $f$ ma dokładnie dwa miejsca zerowe oraz te miejsca zerowe, można wyznaczyć również następująco.

$$f(x) = m^2x^2 - 2mx - m + 1$$

$$f(x) = (mx-1)^2 - m$$

$$(mx-1)^2 - m = 0$$

$$(mx-1)^2 = m$$

Dla $m \leq 0$ to równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych, natomiast dla $m > 0$ otrzymujemy:

$$mx - 1 = -\sqrt{m} \quad \vee \quad mx - 1 = \sqrt{m}$$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{m}}{m} \quad \vee \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{m}}{m}$$

Zatem funkcja $f$ ma dokładnie dwa miejsca zerowe tylko wtedy, gdy $m \in (0 + \infty)$.

*Sposób III (poprzez wzory Viète'a)*

Przy $m \neq 0$ funkcja $f$ ma dokładnie dwa miejsca zerowe $x_1$, $x_2$ należące do przedziału $(-2, 2)$, gdy spełnione są następujące warunki:

$$\Delta > 0 \quad \wedge \quad 0 < 2 - x_1 \quad \wedge \quad 0 < 2 - x_2 \quad \wedge \quad 0 < x_1 + 2 \quad \wedge \quad 0 < x_2 + 2$$

Liczby $2 - x_1$ oraz $2 - x_2$ są dodatnie tylko wówczas, gdy ich suma i iloczyn są dodatnie.
Liczby $x_1 + 2$ oraz $x_2 + 2$ są dodatnie tylko wówczas, gdy ich suma i iloczyn są dodatnie.
Zatem przy $m \neq 0$ funkcja $f$ ma dokładnie dwa miejsca zerowe $x_1$, $x_2$ należące do przedziału $(-2, 2)$ tylko wówczas, gdy spełnione są poniższe warunki:

A) $\Delta > 0$
B) $x_1 + 2 + x_2 + 2 > 0$
C) $x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$
D) $2 - x_1 + 2 - x_2 > 0$
E) $x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$.

Rozwiązujemy warunek A), tj. nierówność $b^2 - 4ac > 0$:

$$(-2m)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot (-m + 1) > 0$$

$$4m^3 > 0$$

$$m \in (0, +\infty)$$

Rozwiązujemy warunek B), stosując wzory Viète'a:

$$x_1 + 2 + x_2 + 2 > 0$$

$$\frac{2m}{m^2} + 4 > 0$$

$$4m^2 + 2m > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$2m(2m + 1) > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$$

Rozwiązujemy warunek C), stosując wzory Viète'a:

$$x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$$

$$\frac{-m + 1}{m^2} + 2 \cdot \frac{2m}{m^2} + 4 > 0$$

$$-m + 1 + 4m + 4m^2 > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$4m^2 + 3m + 1 > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$\left(2m + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \neq 0$$

Rozwiązujemy warunek D), stosując wzory Viète'a:

$$2 - x_1 + 2 - x_2 > 0$$

$$4 - \frac{2m}{m^2} > 0$$

$$4m^2 - 2m > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$2m(2m - 1) > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Rozwiązujemy warunek E), stosując wzory Viète'a:

$$x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$$

$$\frac{-m + 1}{m^2} - 2 \cdot \frac{2m}{m^2} + 4 > 0$$

$$-m + 1 - 4m + 4m^2 > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$4m^2 - 5m + 1 > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$(4m - 1)(m - 1) > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty)$$

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru $m$, które jednocześnie spełniają warunki A) – E) oraz $m \neq 0$: $m \in (1, +\infty)$.

## Zadanie 14. (0–6)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | Zdający:<br>7.1R) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu. |

**Zasady oceniania**

6 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $|BC| = 5$ i $|CD| = 6$ oraz $P = 30\sqrt{3}$.

5 pkt – obliczenie długości boków $BC$ oraz $CD$: $|BC| = 5$ oraz $|CD| = 6$.

4 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (długością boku $BC$ lub długością boku $CD$), np.

$91 = |BC|^2 + (|BC| + 1)^2 - 2 \cdot |BC| \cdot (|BC| + 1) \cdot \cos 120°$,

$91 = \left(|BC| + 1 + \frac{1}{2} \cdot |BC|\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |BC|\right)^2$

*ALBO*

– zapisanie układu równań z dwiema niewiadomymi (długościami boków $BC$ i $CD$), np. $\begin{cases} 9 + |CD| = 10 + |BC| \\ \left(\sqrt{91}\right)^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot \cos 120° \end{cases}$

3 pkt – spełnienie wszystkich warunków 1) – 3) określonych w kryterium za 1 punkt

*ALBO*

– spełnienie warunków 1) i 2) określonych w kryterium za 1 punkt **oraz** zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta $BCD$ i zapisanie równania $|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot \cos|\sphericalangle BCD|$,

*ALBO*

– spełnienie warunków 2) i 3) określonych w kryterium za 1 punkt **oraz** zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta $BCD$ i zapisanie równania $|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot \cos|\sphericalangle BCD|$.

2 pkt – spełnienie dwóch spośród warunków 1) – 3) określonych w kryterium za 1 punkt.

1 pkt – spełnienie jednego z warunków 1) – 3):

1) zastosowanie twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu i zapisanie zależności między długością boku $BC$ a długością boku $CD$ czworokąta, np. $9 + |CD| = 10 + |BC|$,

2) zapisanie jednego z dwóch równań: $|BD|^2 = 9^2 + 10^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cos 60°$ lub $|BD|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10\right)^2 + (9 - 5)^2$,

3) zastosowanie twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg i obliczenie miary kąta $BCD$: $120°$.

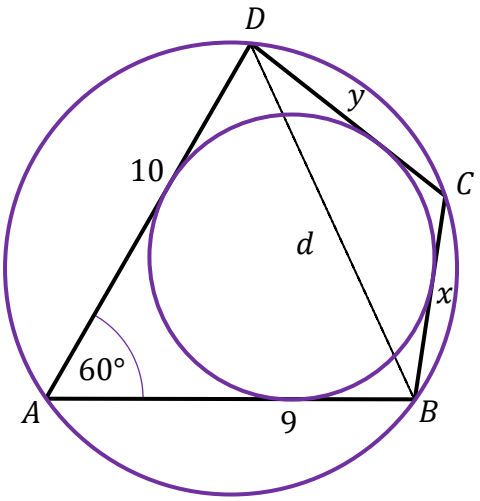
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga:**
Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

a) błędne zastosowanie twierdzenia cosinusów albo
b) błędne zastosowanie wzoru redukcyjnego, albo
c) błędne zastosowanie twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu (tj. zapisanie związku $9 \cdot |CD| = 10 \cdot |BC|$ lub $10 + |CD| = 9 + |BC|$), albo
d) błędne zastosowanie własności miarowych trójkąta prostokątnego o kątach ostrych $30°$ i $60°$, albo
e) błędna interpretacja obliczonej długości jednego z dwóch szukanych boków czworokąta,

ale zdający realizuje poprawnie strategię rozwiązania zadania, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.
Jeżeli zdający popełni dodatkowo błędy rachunkowe, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**
Przyjmijmy następujące oznaczenia: $x = |BC|$, $y = |CD|$, $d = |BD|$ (zobacz rysunek).




Na czworokącie $ABCD$ jest opisany okrąg, więc $60° + |\sphericalangle BCD| = 180°$, czyli $|\sphericalangle BCD| = 120°$.
W czworokąt $ABCD$ jest wpisany okrąg, więc $9 + y = 10 + x$, czyli $y = x + 1$.
Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta $ABD$ i otrzymujemy

$$d^2 = 9^2 + 10^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cos 60°$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta $BCD$ i otrzymujemy:

$$d^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos 120°$$

$$d^2 = x^2 + (x+1)^2 + 2x(x+1) \cdot \frac{1}{2}$$

Zatem:

$$9^2 + 10^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cos 60° = x^2 + (x+1)^2 + 2x(x+1) \cdot \frac{1}{2}$$

$$0 = 3x^2 + 3x - 90$$

$$0 = x^2 + x - 30$$

$$x = 5 \quad \vee \quad x = -6 \notin (0, +\infty)$$

Stąd $|BC| = 5$ i $|CD| = |BC| + 1 = 6$.
Pole czworokąta $ABCD$ jest sumą pól trójkątów $ABD$ i $BCD$.
Obliczamy pole $P$ czworokąta $ABCD$:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \cdot \sin 60° + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin 120° = 45 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$$

## Zadanie 15. (0–7)

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>11.6R) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych. |

### Zasady oceniania

**Część a)**

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – spełnienie kryterium zapisanego w pierwszym myślniku w kategorii za 1 punkt **oraz** zapisanie układu co najwyżej trzech równań niezależnych, umożliwiającego wyznaczenie $h$ w zależności od $x$

*ALBO*

– wyznaczenie $\operatorname{tg}(2\alpha)$ w zależności od $x$, np. $\operatorname{tg}(2\alpha)=\frac{4rx}{x^2-4r^2}$ (dla *sposobu II*),

*ALBO*

– wyznaczenie zależności między $P$ oraz $x$, np. $P^2=\frac{P}{r}\left(\frac{P}{r}-x\right)\cdot\frac{1}{4}x^2$ (dla *sposobu III*).

1 pkt – zapisanie związku między $h$ i $x$ oraz jedną z wielkości: długością $b$ ramienia, lub długością odcinka $CE$, lub długością odcinka $CS$, np.:

$$b^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+h^2\ ,\ \frac{r}{h-r}=\frac{\frac{1}{2}x}{b}\ ,\ \frac{1}{2}xh=r\cdot\left(\frac{1}{2}x+b\right),$$

*ALBO*

– zapisanie związku $\operatorname{tg}\alpha=\frac{r}{\frac{1}{2}x}$ (dla *sposobu II*),

*ALBO*

– zapisanie związku $P=\left(b+\frac{x}{2}\right)\cdot r$ lub $P=\sqrt{\left(b+\frac{1}{2}x\right)\left(b+\frac{1}{2}x-b\right)\left(b+\frac{1}{2}x-b\right)\left(b+\frac{1}{2}x-x\right)}$ (dla *sposobu III*),

*ALBO*

– zapisanie związków $P=\frac{1}{2}b^2\sin(2\beta)$ oraz $\sin\beta=\frac{r}{h-r}$,

*ALBO*

– zapisanie długości boków trójkąta $ADC$ (lub trójkąta $CES$) w zależności od $x$ i $h$ (dla *sposobu IV*),

*ALBO*

– zapisanie długości przyprostokątnych trójkątów $ADC$ oraz $CES$ w zależności od $x$ i $h$ (dla *sposobu IV*).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga:**

Kategorie za 1 punkt oraz za 2 punkty oceniamy w sytuacji, gdy zdający posługuje się symbolem $r$ albo przyjmie $r=2$ lub $r=4$. Natomiast jeżeli zdający przyjmie promień inny niż $2$ lub $4$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

**Część b)**

4 pkt – uzasadnienie, że funkcja $P$ przyjmuje wartość najmniejszą dla $x = 4\sqrt{3}$ $(m)$, **oraz** obliczenie pola trójkątnego klombu o takiej podstawie: $P\left(4\sqrt{3}\right) = 12\sqrt{3}$ $(m^2)$.

3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja $P$ przyjmuje wartość najmniejszą dla $x = 4\sqrt{3}$.

2 pkt – obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji $P$: $x = 4\sqrt{3}$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji $P$, np. $P'(x) = \frac{6x^2 \cdot (x^2 - 16) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)^2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

**1.** Jeżeli zdający wyznacza pochodną ilorazu jako iloraz pochodnych, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

**2. a)** Jeżeli z rozwiązania wynika, że zdający poprawnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji oraz zdający poprawnie wyznacza pochodne funkcji $2x^3$ oraz $x^2 - 16$ i dalej popełnia błędy, otrzymując pochodną w postaci $\frac{6x^2 \cdot (x^2 - 16) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)}$ lub $\frac{B(x)}{(x^2 - 16)^2}$, gdzie $B$ jest wielomianem stopnia czwartego, który w przedziale $(4, 10]$ ma dokładnie jeden pierwiastek, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (za miejsce zerowe pochodnej, za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji, za obliczenie najmniejszej wartości funkcji $P$).

**b)** Jeżeli z rozwiązania nie wynika, że zdający poprawnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji lub zdający błędnie wyznacza pochodną funkcji $2x^3$ lub $x^2 - 16$ i dalej popełnia błędy, otrzymując pochodną w postaci $\frac{6x^2 \cdot (x^2 - 16) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)}$ lub $\frac{B(x)}{(x^2 - 16)^2}$, gdzie $B$ jest wielomianem stopnia czwartego, który w przedziale $(4, 10]$ ma dokładnie jeden pierwiastek, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji i za obliczenie najmniejszej wartości funkcji $P$).

**3.** Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja osiąga wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości $x$, przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej

**ORAZ**:

– opisuje (słownie lub graficznie – np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji $P$

LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości $x$ funkcja $P$ ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość,

LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości $x$ funkcja $P$ ma minimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.

Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku (np. znakami „+” i „−”) znak pochodnej.

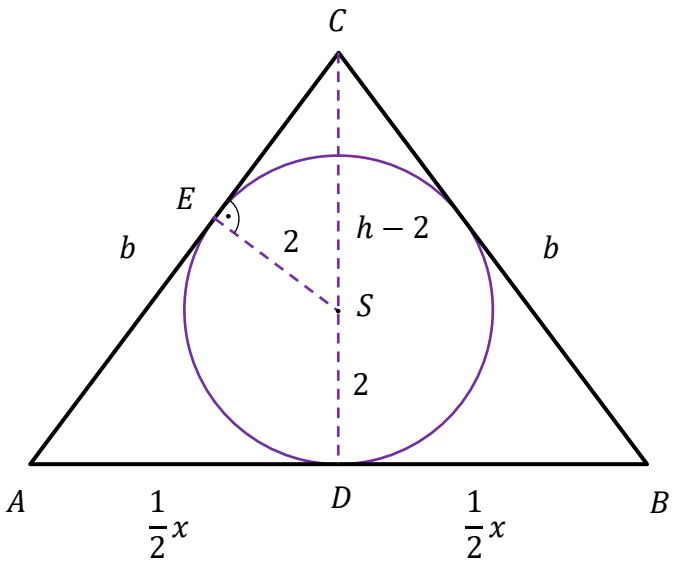
4. Jeżeli zdający przedstawi niepełne uzasadnienie, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (nie otrzymuje punktu za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości).
5. Jeżeli zdający, uzasadniając najmniejszą wartość funkcji, rozpatruje funkcję w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}_+$, lub w $(4, +\infty)$, lub w $(0, 10]$, to może uzyskać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
6. Jeżeli zdający nie uzasadnia istnienia najmniejszej wartości funkcji, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za pochodną i 1 punkt za miejsce zerowe pochodnej).

**Przykładowe pełne rozwiązania**

**a)**

*Sposób I*

Rozważmy trójkąt równoramienny $ABC$ o podstawie $AB$ długości $x$ i wysokości $CD$, w który jest wpisany okrąg o promieniu $r = 2$. Niech $S$ będzie środkiem tego okręgu, natomiast $E$ – punktem styczności tego okręgu z ramieniem $AC$. Oznaczmy $h = |CD|$ oraz $b = |AC|$ (zobacz rysunek).




Korzystamy z podobieństwa trójkątów $CES$ i $CDA$, otrzymując:

$$\frac{|SE|}{|CS|} = \frac{|AD|}{|AC|}$$

$$\frac{2}{h-2} = \frac{\frac{1}{2}x}{b}$$

$$b = \frac{1}{4}x(h-2)$$

Stąd i z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta $ADC$ dostajemy:

$$b^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + h^2$$

$$\left(\frac{1}{4}xh - \frac{1}{2}x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + h^2$$

$$\frac{1}{16}x^2h^2 - \frac{1}{4}x^2h + \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2 + h^2$$

$$\frac{1}{16}x^2h - \frac{1}{4}x^2 = h$$

$$h\left(\frac{1}{16}x^2 - 1\right) = \frac{1}{4}x^2$$

$$h(x^2 - 16) = 4x^2$$

$$h = \frac{4x^2}{x^2 - 16}$$

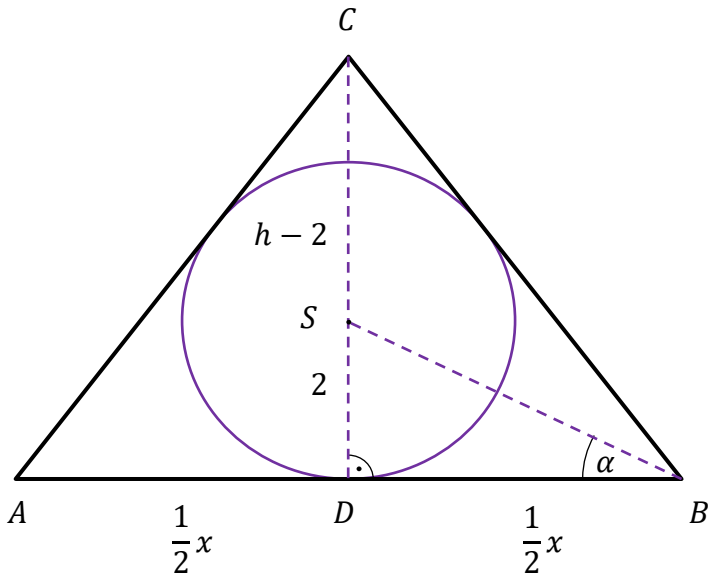
Wyznaczamy pole $P$ trójkąta $ABC$:

$$P = \frac{1}{2}xh = \frac{1}{2}x \cdot \frac{4x^2}{x^2 - 16} = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$$

To należało wykazać.

*Sposób II*

Rozważmy trójkąt równoramienny $ABC$ o podstawie $AB$ długości $x$ i wysokości $CD$, w który jest wpisany okrąg o promieniu $r = 2$. Niech $S$ będzie środkiem tego okręgu. Oznaczmy $h = |CD|$ oraz $\alpha = |\sphericalangle SBD|$ (zobacz rysunek).



Z trójkąta prostokątnego $BSD$ otrzymujemy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\frac{1}{2}x} = \frac{4}{x}$.

Stąd i ze wzoru na tangens podwojonego kąta otrzymujemy

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{4}{x}}{1-\left(\frac{4}{x}\right)^2} = \frac{8x}{x^2-16}$$

Punkt $S$ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $ABC$, więc prosta $SB$ jest dwusieczną kąta $CBD$. Zatem $\frac{h}{\frac{1}{2}x} = \operatorname{tg}(2\alpha)$, czyli

$$h = \frac{1}{2}x\cdot\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{4x^2}{x^2-16}$$

Wyznaczamy pole $P$ trójkąta $ABC$:

$$P = \frac{1}{2}xh = \frac{1}{2}x\cdot\frac{4x^2}{x^2-16} = \frac{2x^3}{x^2-16}$$

To należało wykazać.

*Sposób III*

Rozważmy trójkąt równoramienny $ABC$ o podstawie $AB$ długości $x$ i wysokości $CD$, w który jest wpisany okrąg o promieniu $r=2$. Oznaczmy $b=|AC|$ i niech $p$ będzie połową obwodu tego trójkąta.

Wówczas $p = \frac{b+b+x}{2} = b+\frac{1}{2}x$. Stąd i ze wzoru $P = p\cdot r$ otrzymujemy:

$$P = \left(b+\frac{1}{2}x\right)\cdot 2$$

$$b = \frac{P-x}{2}$$

Korzystamy ze wzoru Herona i otrzymujemy:

$$P = \sqrt{p(p-b)(p-b)(p-x)}$$

$$P = \sqrt{\left(b+\frac{1}{2}x\right)\left(b+\frac{1}{2}x-b\right)\left(b+\frac{1}{2}x-b\right)\left(b+\frac{1}{2}x-x\right)}$$

$$P^2 = \left(b+\frac{1}{2}x\right)\left(b-\frac{1}{2}x\right)\cdot\frac{1}{4}x^2$$

Stąd i ze związku $b = \frac{P-x}{2}$ wyznaczamy pole trójkąta $ABC$:

$$P^2 = \left(\frac{P-x}{2}+\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{P-x}{2}-\frac{1}{2}x\right)\cdot\frac{1}{4}x^2$$

$$P^2 = \frac{1}{2}P \cdot \left(\frac{1}{2}P - x\right) \cdot \frac{1}{4}x^2$$

$$P = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P - x\right) \cdot \frac{1}{4}x^2$$

$$P = \frac{1}{16}Px^2 - \frac{1}{8}x^3$$

$$16P = Px^2 - 2x^3$$

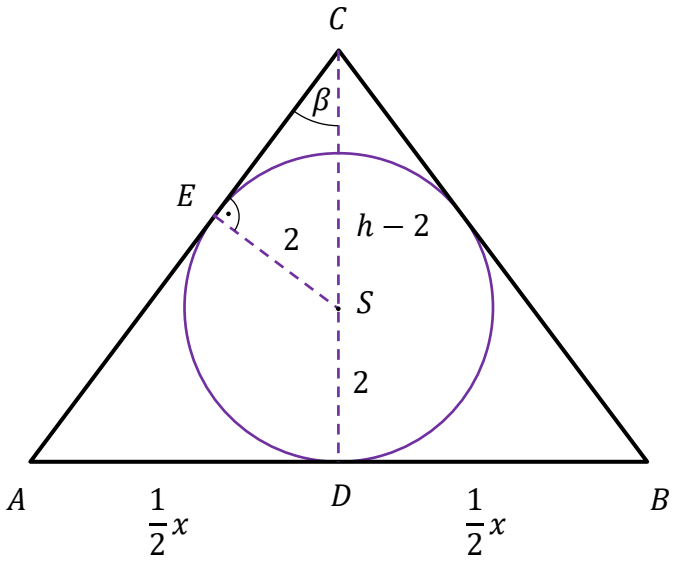
$$2x^3 = Px^2 - 16P$$

$$\frac{2x^3}{x^2 - 16} = P$$

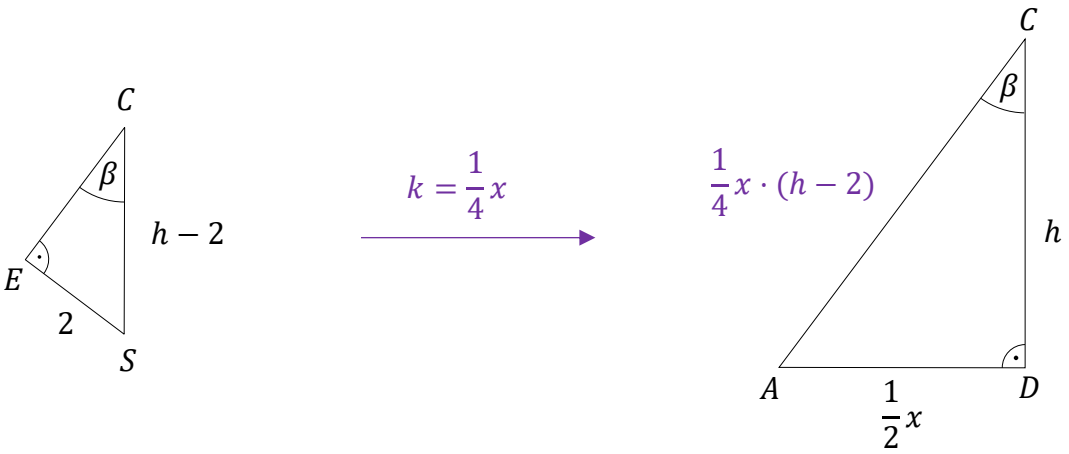
To należało wykazać.

*Sposób IV*

Rozważmy trójkąt równoramienny $ABC$ o podstawie $AB$ długości $x$ i wysokości $CD$, w który jest wpisany okrąg o promieniu $r = 2$. Niech $S$ będzie środkiem tego okręgu, natomiast $E$ – punktem styczności tego okręgu z ramieniem $AC$. Oznaczmy $h = |CD|$ oraz $\beta = |\sphericalangle SCE|$ (zobacz rysunek).




Kąty w trójkątach $ADC$ oraz $SEC$ mają miary $90°$, $\beta$ oraz $90° - \beta$, więc te trójkąty są podobne na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów. Trójkąt $ADC$ jest podobny do trójkąta $SEC$ w skali $k = \frac{\frac{1}{2}x}{2} = \frac{1}{4}x$. Zatem $|AC| = k \cdot |CS| = \frac{1}{4}x \cdot (h - 2)$ (zobacz rysunek).




Stosujemy do trójkąta $ADC$ twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy:

$$\left[\frac{1}{4}x\cdot(h-2)\right]^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+h^2$$

$$\left(\frac{1}{4}xh-\frac{1}{2}x\right)^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+h^2$$

$$\frac{1}{16}x^2h^2-\frac{1}{4}x^2h+\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{4}x^2+h^2$$

$$\frac{1}{16}x^2h-\frac{1}{4}x^2=h$$

$$h\left(\frac{1}{16}x^2-1\right)=\frac{1}{4}x^2$$

$$h(x^2-16)=4x^2$$

$$h=\frac{4x^2}{x^2-16}$$

Wyznaczamy pole $P$ trójkąta $ABC$:

$$P=\frac{1}{2}xh=\frac{1}{2}x\cdot\frac{4x^2}{x^2-16}=\frac{2x^3}{x^2-16}$$

To należało wykazać.

**b)**

Obliczamy argument, dla którego funkcja $P$ określona wzorem $P(x)=\frac{2x^3}{x^2-16}$ dla $x\in(4,10]$ osiąga wartość najmniejszą.

Wyznaczamy pochodną funkcji $P$: $P'(x)=\frac{6x^2\cdot(x^2-16)-2x^3\cdot 2x}{(x^2-16)^2}=\frac{2x^2(x^2-48)}{(x^2-16)^2}$ dla $x\in(4,10]$.

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji $P$:

$$P'(x)=0$$

$$\frac{2x^2(x^2-48)}{(x^2-16)^2}=0$$

$$2x^2(x^2-48)=0$$

$$x=0\notin(4,10]\ \vee\ x=-4\sqrt{3}\notin(4,10]\ \vee\ x=4\sqrt{3}\in(4,10]$$

Badamy znak pochodnej:

$$P'(x)<0$$

$$\frac{2x^2(x^2-48)}{(x^2-16)^2}<0\ \wedge\ x\in(4,10]$$

$$x^2(x^2-48)<0\ \wedge\ x\in(4,10]$$

$$x^2<48\ \wedge\ x\in(4,10]$$

$$x\in\left(4,4\sqrt{3}\right)$$

więc $P'(x)<0$ dla $x\in\left(4,4\sqrt{3}\right)$ oraz $P'(x)>0$ dla $x\in\left(4\sqrt{3},10\right]$.
Zatem funkcja $P$ jest malejąca w przedziale $(4,4\sqrt{3}]$ i rosnąca w przedziale $\left[4\sqrt{3},10\right]$.
Stąd funkcja $P$ osiąga wartość najmniejszą dla $x=4\sqrt{3}$ $(m)$. Wtedy

$$P\left(4\sqrt{3}\right)=\frac{2\cdot\left(4\sqrt{3}\right)^3}{\left(4\sqrt{3}\right)^2-16}=12\sqrt{3}\quad(m^2)$$

Uwaga.
Funkcja $P$ jest różniczkowalna, więc jest ciągła. Ponadto $\lim\limits_{x\to4^+}P(x)=+\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to10^-}P(x)=\frac{500}{21}$, więc uwzględniając wartość funkcji $P$ w punkcie stacjonarnym $x=4\sqrt{3}$ równą $P\left(4\sqrt{3}\right)=12\sqrt{3}$, można sformułować wniosek, że funkcja $P$ osiąga wartość najmniejszą równą $12\sqrt{3}$ dla argumentu $x=4\sqrt{3}$.